Х. П. Гнатенко, В. М. Ткачук

ФІЗИЧНІ СИСТЕМИ
У
КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРІ

Навчальний посібник

$$[X,P]=i\hbar(1+\beta P^2)$$

некомутативний простір

$$[X_i,X_j]=i\hbar\theta_{ij}$$

мінімальна довжина

деформована алгебра

$$[X_i,X_j]=i\hbar\theta_{ij}^{k}X_k$$

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Х. П. Гнатенко, В. М. Ткачук

ФІЗИЧНІ СИСТЕМИ У КВАНТОВАНОМУ ПРОСТОРІ

Навчальний посібник

Львів

2021

УДК 530.145 (075.8)
Г 56

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. О. Ситенко**
(Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України);
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Ткач**
(Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича);
д-р фіз.-мат. наук **Ю. Г. Яремко**
(Інститут фізики конденсованих систем НАН України).

Рекомендовано до друку Вченою радою
Львівського національного університету імені Івана Франка
(Протокол №16/6 від 30.06.2021)

In the book quantized space, built on the idea of deformation of the usual commutation relations for coordinate and momentum operators is considered; basic types of deformed algebras which describe features of space structure on Planck scales are analyzed; the fundamental problems that arise in quantized space are highlighted and the ways to solve them are presented. In the book the results of original researches of its authors are presented, that will be useful for anyone interested in features of space structure on the Planck scale, in construction of a self-consistent theory of quantized space with preserved fundamental laws and principles, finding the upper bound for the minimal length.

The book is meant for students, post-graduates of physics and mathematics, teachers and researchers.

Гнатенко Х. П.

Г 56 Фізичні системи у квантованому просторі : навч. посібник / Х. П. Гнатенко, В. М. Ткачук. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2021. — 130 с.

ISBN 978-617-10-0642-3

У навчальному посібнику розглянуто квантований простір, побудований на основі ідеї про деформацію звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та імпульсів; проаналізовані основні типи деформованих алгебр, за допомогою яких описують особливості структури простору на планківських масштабах; висвітлені фундаментальні проблеми у квантованому просторі та подані шляхи їхнього розв'язання. У посібнику репрезентовані результати оригінальних досліджень його авторів, що буде корисним для всіх, хто цікавиться особливостями структури простору на планківських масштабах, побудовою самоузгодженої теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами, знаходженням верхньої межі для мінімальної довжини.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, викладачів та науковців.

УДК 530.145 (075.8)

ISBN 978-617-10-0642-3

Зміст

Передмова

Навчальний посібник написаний на основі курсу лекцій з нових задач квантової механіки, який слухають студенти фізичного факультету в рамках магістерської освітньої програми "Фізика та астрофізика". Посібник складається з п'яти розділів, кожен із яких завершується переліком задач.

У першому розділі описана історія виникнення ідеї про те, що оператори координат можуть некомутувати. Проаналізований зв'язок деформації комутаційних співвідношень для координат та імпульсів із теорією струн та квантовою гравітацією, а також розглянуті основі типи деформованих алгебр для операторів координат та операторів імпульсів, які дають можливість описати квантованість простору на планківських масштабах. Студенти вивчатимуть узагальнені співвідношення невизначеностей, які випливають із деформованих комутаційних співвідношень, знаходитимуть обмеження на довжину у квантованому просторі на основі співвідношень невизначеностей.

Другий розділ присвячено найпростішим квантовим задачам у просторі з мінімальною довжиною. Знайдені власні значення оператора квадрата довжини у некомутативному просторі канонічного типу. Проаналізований вплив квантованості простору на спектр двовимірного гармонічного осцилятора у просторі з канонічною некомутативністю координат. Методом суперсиметрії розв'язані задачі на знаходження енергетичних рівнів гармонічного осцилятора у деформованому просторі з мінімальною довжиною.

У третьому розділі розглянуті особливості опису систем багатьох частинок у квантованому просторі, рух системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Досліджена проблема зведення двочастинкової задачі до задачі про рух центра мас та відносний рух у квантованому просторі.

Четвертий розділ присвячено фундаментальним проблемам, які зумовлені деформацією звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та імпульсів. Описана проблема порушення адитивності кінетичної енергії, а отже, порушення і закону збереження енергії, невиконання слабкого принципу еквівалентності у квантованих просторах з алгеброю канонічного типу та у випадку довільної функції деформації, яка залежить від імпульсів. Також розглянута проблема залежності перетворень Галілея від маси частинки у деформованому просторі. Розв'язана проблема екстремально малих оцінок для мінімальної довжини, отриманих на основі досліджень зсуву перигелію Меркурія.

У п'ятому розділі розглянуті проблеми порушення симетрії відносно інверсії часу та сферичної симетрії у некомутативному просторі канонічного типу та описаний шлях для їхнього розв'язання. У сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі знаходяться енергетичні рівні частинки в однорідному полі.

Автори висловлюють подяку своїм колегам за корисні зауваження під час написання навчального посібника.

Розділ 1

Опис квантованості простору на планківських масштабах за допомогою деформованих алгебр

1.1 Ідея про деформацію звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів

1.1.1 Історія виникнення ідеї та її зв'язок з теорією струн

У квантовій механіці оператори координат X_i та оператори імпульсів P_i задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$[X_i, X_j] = 0, \tag{1.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar, \tag{1.2}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.3}$$

тут індекси i, j набувають значень $(1, 2, 3)$, $\hbar$ – зведена стала Планка.

Ідея про те, що звична алгебра (1.1)–(1.3) може бути модифікована, була запропонована Вернером Гайзенберґом для розв'язання проблем з ультрафіолетовими розбіжностями, які виникають у квантовій теорії поля [1, 2]. Пізніше Гайзенберґ розказав про свою ідею Пайєрлсу, котрий застосовував її при аналізі електричних систем у сильному магнітному полі. Після цього відбувся ланцюжок спілкувань. Пайерлс розказав про ідею модифікації комутаційних співвідношень для операторів координат та імпульсів Паулі, Паулі повідомив її Оппенгеймеру. Оппенгеймер попросив свого аспіранта Снайдера попрацювати над нею. Саме Снайдер став автором першої статті, де була запропонована деформована алгебра (статтю було опубліковано у журналі Physical Review у 1947 році [3])

$$[X_\mu, X_\mu] = i\hbar\beta^2 J_{\mu\nu}, \tag{1.4}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\eta_{\mu\nu} + \beta^2 P_\mu P_\nu), \tag{1.5}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{1.6}$$

Тут $J_{\mu\nu}$ – генератори Лоренца, $\eta_{\mu\nu}$ – метричний тензор, $[\eta_{\mu\nu}] = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, індекси ν, μ набувають значень $(0, 1, 2, 3)$, β – константа, яку називають *параметром деформації*. Алгебру (1.4)- (1.6) було названо *релятивістською алгеброю Снайдера*.

У останні роки багато уваги до вивчення деформованих алгебр та до дослідження властивостей фізичних систем у просторі з модифікованими комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів приділяють у зв'язку з розвитком теорії струн та теорії квантової гравітації (див., для прикладу, [4–8]). Ці теорії дають можливість передбачити існування мінімальної довжини, яка є порядку довжини Планка

$$l_P = 1,6 \cdot 10^{-35}\text{м}. \tag{1.7}$$

Теорія струн описує неточкові частинки, які називають квантовими струнами, та вивчає їх взаємодію. З цієї теорії випливає узагальнене співвідношення невизначеностей (Generalized Uncertainty Relation, GUP) для операторів координат та імпульсів

$$\delta X \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\delta P} + \beta\delta P\right), \tag{1.8}$$

де β – константа. У нерівності (1.8) введені такі позначення для δX та δP

$$\delta X = \sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}, \tag{1.9}$$

$$\delta P = \sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle}. \tag{1.10}$$

У границі $\beta \to 0$ із нерівності (1.8) отримаємо співвідношення невизначеностей Гайзенберґа

$$\delta X \geq \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\delta P}, \tag{1.11}$$

$$\sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}\sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{1.12}$$

Зауважимо, що параметр β пов'язаний з протяжністю об'єкта, мінімальною довжиною. Мінімальне значення правої частини нерівності (1.8) $\hbar \left(1/\delta P + \beta\delta P\right)/2$ досягається при

$$\delta P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \tag{1.13}$$

та дорівнює

$$\delta X_{min} = \hbar\sqrt{\beta}. \tag{1.14}$$

1.1.2 Частинка в потенціальній ямі з безмежно високими стінками та мінімальна довжина

Обмеження на довжину є результатом таких міркувань. Розглянемо частинку з масою m у потенціальній ямі шириною a з безмежно високими стінками. З квантової механіки добре відомі енергетичні рівні такої частинки

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}, \tag{1.15}$$

де $n = 1, 2, 3....$ Частинка в потенціальній ямі локалізована в області шириною a. Для такої локалізації необхідна енергія. Поставимо запитання до якої межі ми можемо локалізувати частинку, до яких розмірів a ми можемо зменшувати ширину потенціальної ями? Дамо відповідь на них. Розгляньмо найнижчий енергетичний рівень $n = 1$,

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}. \tag{1.16}$$

Можемо розглянути також локалізацію частинки в тривимірній сферичній ямі з радіусом a. Тоді найнижчий енергетичний рівень з $n = 1$ і орбітальним квантовим числом $l = 0$ визначають також як (1.16). При зменшенні a енергія E_1 зростає. Згідно з відомою формулою Айнштайна, яка пов'язує енергію та масу, зростає також ефективна маса частинки. Для достатньо малих a ефективна маса стає набагато більшою від маси спокою частинки. У цьому випадку можемо записати таку рівність

$$mc^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, \tag{1.17}$$

де c – швидкість світла.

Пригадаємо, що стиснення тіла масою m у кулю радіусом меншим чи рівним гравітаційному радіусу (радіусу Шварцшильда) зумовлює гравітаційний колапс та перетворення тіла у чорну діру. Для тіла з масою m гравітаційний радіус визначають як

$$R_g = \frac{2Gm}{c^2}, \tag{1.18}$$

де G – гравітаційна стала. Отже, частинка перетвориться у чорну діру у випадку зменшення ширини (радіуса) потенціальної ями до розмірів

$$a = R_g = \frac{2Gm}{c^2}. \tag{1.19}$$

Із (1.17) маємо

$$m = \frac{\hbar \pi}{\sqrt{2} ac}. \tag{1.20}$$

Підставивши (1.20) у (1.19), знайдемо

$$a = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = l_P. \tag{1.21}$$

Отже, ми не можемо локалізувати частинку в області меншій ніж довжина Планка. Якщо ширина ями буде менша ніж планківська довжина, відбудеться гравітаційний колапс, тобто частинка перетвориться у чорну діру. Поєднання квантової механіки та теорії гравітації веде до появи мінімальної довжини планківських масштабів.

1.2 Одновимірна деформована алгебра, що дає змогу описати простір з мінімальною довжиною

1.2.1 Квадратична деформація та узагальнене співвідношення невизначеностей

Узагальнене співвідношення невизначеностей (1.8) можна отримати, розглянувши квадратичну за імпульсами деформацію звичного комутаційного співвідношення для операторів координати та імпульсу, а саме

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2). \tag{1.22}$$

Тут β – параметр деформації, $\beta > 0$ [9, 10]. Щоб це показати, пригадаємо з квантової механіки, що для операторів A, B, які не комутують

$$[A, B] = iC, \tag{1.23}$$

виконується таке співвідношення невизначеностей

$$\langle \Delta A^2 \rangle \langle \Delta B^2 \rangle \geq \frac{\langle C \rangle^2}{4}. \tag{1.24}$$

Запишемо співвідношення (1.24) для операторів координати та імпульсу, які задовольняють (1.22). Маємо

$$\langle \Delta X^2 \rangle \langle \Delta P^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}(1 + \beta \langle P \rangle^2)^2. \tag{1.25}$$

Співвідношення (1.25) називають *узагальненим співвідношенням невизначеностей*. Ввівши $\delta X = \sqrt{\langle \Delta X^2 \rangle}$, $\delta P = \sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle}$ нерівність (1.25) можемо переписати як

$$\delta X \delta P \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \langle P^2 \rangle). \tag{1.26}$$

Знаємо, що середнє квадратичне відхилення для оператора A має вигляд

$$\langle \Delta A^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2. \tag{1.27}$$

Отже, можемо записати

$$\langle P^2 \rangle = \langle \Delta P^2 \rangle + \langle P \rangle^2. \tag{1.28}$$

Нерівність (1.25) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \delta X \delta P &\geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \langle \Delta P^2 \rangle + \beta \langle P \rangle^2) \geq \\ &\geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta \langle \Delta P^2 \rangle) = \frac{\hbar}{2}(1 + (\delta P)^2), \end{aligned} \tag{1.29}$$

де враховано те, що $\beta > 0$, $\langle P \rangle^2 > 0$, а також, що згідно з позначенням (1.10)

$$\langle \Delta P^2 \rangle = (\sqrt{\langle \Delta P^2 \rangle})^2 = (\delta P)^2. \tag{1.30}$$

Із (1.29) легко отримаємо узагальнене співвідношення невизначеностей (1.8).

Деформація комутаційних співвідношень для операторів координати та імпульсу (1.22) зумовлює узагальнене співвідношення невизначеностей та описує простір з мінімальною довжиною, яку визначають через параметр деформації $\hbar\sqrt{\beta}$ (див. (1.14)). Зауважимо, що у границі $\beta \to 0$ із (1.22) отримаємо звичне співвідношення $[X, P] = i\hbar$ та співвідношення невизначеностей Гайзенберґа.

1.2.2 Зображення для операторів координат та операторів імпульсів

Для операторів координати та імпульсу, які задовольняють співвідношення (1.22), зручно використовувати зображення через оператори координати та імпульсу x, p, комутатор для яких має звичний вигляд

$$[x,p] = i\hbar. \tag{1.31}$$

Розрізняють імпульсне та квазікоординатне зображення.

Іспульсне зображення означають як

$$X = x(1+\beta p^2), \tag{1.32}$$
$$P = p. \tag{1.33}$$

Урахувавши співвідношення (1.31), легко переконатися, що комутатор для операторів X, P відповідає співвідношенню деформованої алгебри

$$[X,P] = [x(1+\beta p^2), p] = i\hbar(1+\beta p^2) = i\hbar(1+\beta P^2). \tag{1.34}$$

У **квазікоординатному представленні** оператори координати та імпульсу записують так

$$X = x, \tag{1.35}$$
$$P = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan(\sqrt{\beta}p). \tag{1.36}$$

Зображення квазікоординатне, оскільки

$$\langle \Delta x^2 \rangle \geq \hbar\sqrt{\beta}, \tag{1.37}$$

тому не існує власних станів оператора координати. Оператор імпульсу обмежений

$$-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} < p < \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}. \tag{1.38}$$

Можемо переконатися, що справджується така рівність

$$[X,P] = [x, \frac{1}{\sqrt{\beta}}\tan(\sqrt{\beta}p)] = i\hbar(1+\beta P^2). \tag{1.39}$$

Алгебра (1.22) може бути узагальнена до такого вигляду

$$[X,P] = i\hbar(1+\alpha X^2+\beta P^2), \tag{1.40}$$

(де α, β – константи, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha\beta < \hbar^{-2}$). Деформація комутаційного співвідношення (1.40) зумовлює наявність мінімальних невизначеностей координати та імпульсу, які визначають як

$$\Delta X_0 = \hbar\sqrt{\frac{\beta}{1-\hbar^2\alpha\beta}}, \tag{1.41}$$

$$\Delta P_0 = \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{1-\hbar^2\alpha\beta}}, \tag{1.42}$$

(див., для прикладу, [11, 12]).

1.3 Алгебра Кемпфа та її узагальнення

Для опису квантованих просторів з більшими вимірностями А. Кемпф узагальнив алгебру (1.22), запропонувавши такі комутаційні співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів

$$[X_i, X_j] = -i\hbar\frac{(2\beta-\beta')+(2\beta+\beta')\beta P^2}{1+\beta P^2}(X_iP_j - X_jP_i), \tag{1.43}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1+\beta P^2) + \beta' P_iP_j), \tag{1.44}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.45}$$

Константи $\beta \geq 0$, $\beta' \geq 0$ називають параметрами деформації [13]. Деформація комутаційних співвідношень (1.43)–(1.45) спричиняє наявність мінімальної довжини, яку визначають за величинами параметрів деформації $\hbar\sqrt{\beta+\beta'}$.

Зауважимо, що коли $\beta' = 2\beta$, з точністю до першого порядку за параметром деформації β можемо записати співвідношення (1.43)–(1.45) у такому вигляді

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, \tag{1.46}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1+\beta P^2) + 2\beta P_iP_j), \tag{1.47}$$

(див. статті [14, 15]).

У більш загальному випадку алгебру Кемпфа (1.43)–(1.45) можна переписати як

$$[X_i, X_j] = i\hbar G(P^2)(X_i P_j - X_j P_i), \tag{1.48}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar (f(P^2)\delta_{ij} + F(P^2) P_i P_j), \tag{1.49}$$
$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.50}$$

Тут $G(P^2)$, $F(P^2)$, $f(P^2)$ – певні функції. Важливо зауважити, що вони не можуть бути довільні. Для того, щоб виконувалася тотожність Якобі

$$[[A, B], C] + [[B, C]A] + [[C, A]B] = 0, \tag{1.51}$$

для будь-якої трійки операторів $A, B, C = (X_1, X_2, X_3, P_1, P_2, P_3)$, ці функції мають задовольняти такі рівності

$$f(F - G) - 2f'(f + FP^2) = 0, \tag{1.52}$$
$$f' = \frac{\partial f}{\partial P}, \tag{1.53}$$

(див. статтю [16]). Одну з функцій можемо виразити через інші. Для G маємо

$$G = \frac{fF - 2f'(f + FP^2)}{f}. \tag{1.54}$$

Для прикладу, вибравши

$$f(P^2) = 1 + \beta P^2, \tag{1.55}$$
$$F = \beta', \tag{1.56}$$

знайдемо

$$G(P^2) = -\frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2}, \tag{1.57}$$

У цьому разі співвідношення (1.48)–(1.50) відповідають деформованій алгебрі Кемпфа (1.43)–(1.45).

При виборі функцій

$$f = 1, \tag{1.58}$$
$$F = G = \beta^2, \tag{1.59}$$

алгебра (1.48)–(1.50) буде відповідати нерелятивістській алгебрі Снайдера, яка характеризується такими комутаційними співвідношеннями

$$[X_i, X_j] = i\hbar\beta^2(X_i P_j - X_j P_i), \tag{1.60}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta^2 P_i P_j), \tag{1.61}$$
$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.62}$$

тут індекси $i, j = (1, 2, 3)$ (див., для прикладу, статті [17–21]).

Комутатор для координат та імпульсів дорівнює нулю у випадку, коли

$$f(P^2) = \sqrt{1 + \beta P^2}, \tag{1.63}$$
$$F(P^2) = \beta\sqrt{1 + \beta P^2}. \tag{1.64}$$

Водночас знаходимо $G = 0$, деформована алгебра має вигляд

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, \tag{1.65}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\sqrt{1 + \beta P^2}(\delta_{ij} + \beta P_i P_j), \tag{1.66}$$

(див. [22]). Зауважимо, на відміну від попередніх, ця алгебра описує однорідний простір. Для координат та імпульсів, які задовольняють (1.65), (1.66) справедливим є таке зображення

$$X_i = x_i, \tag{1.67}$$
$$P_i = \frac{p_i}{\sqrt{1 - \beta p^2}}. \tag{1.68}$$

1.4 Алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу

1.4.1 Двовимірна алгебра з некомутативністю координат

Некомутативна алгебра канонічного типу є найпростішою алгеброю, яка дає змогу описати квантованість простору на планківських масштабах. У рамках цієї алгебри модифікується тільки комутаційне співвідношення для операторів координат. Комутатор для координат не дорівнює нулеві, а дорівнює константі. У двовимірному випадку маємо

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{1.69}$$
$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar, \tag{1.70}$$
$$[P_1, P_2] = [X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0, \tag{1.71}$$

де θ – параметр координатної некомутативності [23–26]. Зауважимо, що добуток $\hbar\theta$ має розмірність площі. Вважається, що величина $\hbar\theta$ є порядку квадрата планківської довжини.

Координати та імпульси, які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (1.69)–(1.71), можуть бути зображені як

$$X_1 = x_1 - \tilde{q}\theta p_2, \tag{1.72}$$
$$X_2 = x_2 + (1 - \tilde{q})\theta p_1, \tag{1.73}$$
$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2, \tag{1.74}$$

тут $\tilde{q}$ – константа, яка може бути довільною. Для координат та імпульсів x_i, p_i виконуються звичні співвідношення

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{1.75}$$
$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.76}$$
$$[p_i, p_j] = 0, \tag{1.77}$$

$i, j = (1, 2)$. Важливо зауважити, що у літературі найчастіше використовуєть симетричне зображення, яке отримуємо тоді, коли

$\tilde{q} = 1/2$. У цьому випадку $1 - \tilde{q} = \tilde{q} = 1/2$, та зображення має такий вигляд

$$X_1 = x_1 - \frac{\theta}{2} p_2, \tag{1.78}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\theta}{2} p_1, \tag{1.79}$$

(див., для прикладу, статті [27, 28]).

У просторі з канонічною некомутативністю координат існує обмеження на площу, яке можемо отримати, записавши співвідношення невизначеностей для координат, а саме: з комутаційного співвідношення (1.69) випливає така нерівність

$$\langle \Delta X_1^2 \rangle \langle \Delta X_2^2 \rangle \geq \frac{\hbar \theta^2}{4}. \tag{1.80}$$

Увівши позначеня

$$\delta X_1 = \sqrt{\langle \Delta X_1^2 \rangle}, \tag{1.81}$$

$$\delta X_2 = \sqrt{\langle \Delta X_2^2 \rangle}, \tag{1.82}$$

із останньої нерівності маємо обмеження на величину $\delta X_1 \delta X_2$, яку можемо розглядати як площу

$$\delta X_1 \delta X_2 \geq \frac{\hbar |\theta|}{2}. \tag{1.83}$$

Отже, із співвідношень невизначеностей випливає, що наявна мінімальна площа, яку визначаєть за параметром некомутативності

$$S_{min} = \frac{\hbar |\theta|}{2}. \tag{1.84}$$

1.4.2 Опис руху частинки у сильному магнітному полі за допомогою некомутативності координат

За допомогою некомутативних координат можна описати рух зарядженої частинки у сильному магнітному полі на площині, яка перпендикулярна до поля. Покажемо це детально. Лагранжіан частинки з зарядом e, масою m у сильному однорідному магнітному полі $\mathbf{B}$, яке напрямлене вздовж осі z, у зовнішньому полі $V(x, y)$ має вигляд

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{e}{c}\dot{x}A_x + \frac{e}{c}\dot{y}A_y - V(x, y). \tag{1.85}$$

Тут A_i – компоненти векторного потенціалу, c – швидкість світла. Виберемо калібрування

$$\mathbf{A} = (0, xB). \tag{1.86}$$

Випадок сильного магнітного поля $\mathbf{B}$ рівнозначний малій масі m (див. статті [29]). У границі $m \to 0$ лагранжіан частинки (1.85) матиме такий вигляд

$$L = \frac{e}{c}Bx\dot{y} - V(x, y). \tag{1.87}$$

Рівняння Лагранжа 2-го роду мають вигляд

$$\dot{x} = -\frac{c}{eB}\frac{\partial V}{\partial y}, \tag{1.88}$$

$$\dot{y} = \frac{c}{eB}\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{1.89}$$

Вони рівнозначні канонічним рівнянням Гамільтона з гамільтоніаном $H = V(x, y)$ та дужками Пуассона для координат

$$\{x, y\} = -\frac{c}{eB}. \tag{1.90}$$

У квантовому випадку цим дужкам Пуассона відповідає комутатор

$$[x, y] = -i\hbar\frac{c}{eB}. \tag{1.91}$$

Отже, рух частинки у сильному магнітному полі за наявності додаткового зовнішнього поля $V(x, y)$ можна описати як рух частинки у полі $V(x, y)$ у некомутативному просторі з параметром некомутативності, який визначають величиною поля (1.91) [29].

1.4.3 Некомутативний фазовий простір канонічного типу

Співвідношення некомутативної алгебри (1.69)–(1.71) можуть бути узагальнені як

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1.92}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \tag{1.93}$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{1.94}$$

де $i, j = (1, 2, 3)$. Зауважимо, що алгебру (1.92)–(1.94) характеризують як некомутативністю координат, так і некомутативністю імпульсів. Константи θ_{ij}, η_{ij} – параметри координатної та імпульсної некомутативності, які є елементами антисиметричних матриць. Крім цього, в рамках алгебри модифікуються співвідношення для операторів координат та операторів імпульсів (1.93). Зазначимо, що константи σ_{ij} не можуть бути довільними. Для забезпечення виконання тотожності Якобі для будь-якої трійки операторів X_i, P_i, параметри σ_{ij} мають бути визначені через θ_{ij}, η_{ij}.

Некомутативні координати та некомутативні імпульси X_i, P_i можливо зобразити через координати та імпульси x_i, p_i, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{1.95}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.96}$$

$$[p_i, p_j] = 0, \tag{1.97}$$

де $i = (1, 2, 3)$. У літературі найчастіше розглядається симетричне зображення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів, яке ма вигляд

$$X_i = x_i - \frac{1}{2}\sum_j \theta_{ij} p_j, \tag{1.98}$$

$$P_i = p_i + \frac{1}{2}\sum_j \eta_{ij} p_j. \tag{1.99}$$

Урахувавши (1.95), (1.97), (1.98), (1.99), знайдемо

$$[X_i, X_j] = [x_i - \frac{1}{2}\sum_k \theta_{ik} p_k, x_j - \frac{1}{2}\sum_l \theta_{jl} p_l] = i\hbar\theta_{ij}, \quad (1.100)$$

$$[X_i, P_j] = [x_i - \frac{1}{2}\sum_k \theta_{ik} p_k, p_j + \frac{1}{2}\sum_l \eta_{jl} p_l] =$$

$$= i\hbar(\delta_{ij} + \sum_k \frac{\theta_{ik}\eta_{jk}}{4}), \quad (1.101)$$

$$[P_i, P_j] = [p_i + \frac{1}{2}\sum_k \eta_{ik} p_k, p_j + \frac{1}{2}\sum_l \eta_{jl} p_l] = i\hbar\eta_{ij}. \quad (1.102)$$

Отже, із (1.101) очевидно, що параметри σ_{ij} визначають як

$$\sigma_{ij} = \sum_k \frac{\theta_{ik}\eta_{jk}}{4}. \quad (1.103)$$

Із рівностей (1.92)–(1.94) отримаємо такі співвідношення невизначеностей

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta X_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \theta_{ij}^2}{4}, \quad (1.104)$$

$$\langle \Delta X_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 (\delta_{ij} + 2\sigma_{ij}\delta_{ij} + \sigma_{ij}^2)}{4}, \quad (1.105)$$

$$\langle \Delta P_i^2 \rangle \langle \Delta P_j^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2 \eta_{ij}^2}{4}. \quad (1.106)$$

1.4.4 Мінімальна довжина, площа та об'єм у координатному та імпульсному просторах

Дослідімо оператор квадрата довжини $\mathbf{R}^2$, який визначають як

$$\mathbf{R}^2 = \sum_i X_i^2. \quad (1.107)$$

Координати X_i задовольняють співвідношення (1.92). Взявши до уваги означення (1.107), можемо записати

$$\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \Delta X_1^2 \rangle + \langle \Delta X_2^2 \rangle + \langle \Delta X_3^2 \rangle. \quad (1.108)$$

Щоб оцінити мінімальне значення величини $\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle$, піднесемо (1.108) до квадрата. Отримаємо

$$\begin{gathered}\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle^2 = \langle\Delta X_1^2\rangle^2 + \langle\Delta X_2^2\rangle^2 + \langle\Delta X_3^2\rangle^2 + \\ +2\langle\Delta X_1^2\rangle\langle\Delta X_2^2\rangle + 2\langle\Delta X_2^2\rangle\langle\Delta X_3^2\rangle + 2\langle\Delta X_3^2\rangle\langle\Delta X_1^2\rangle \geq \\ 2\langle\Delta X_1^2\rangle\langle\Delta X_2^2\rangle + 2\langle\Delta X_2^2\rangle\langle\Delta X_3^2\rangle + 2\langle\Delta X_3^2\rangle\langle\Delta X_1^2\rangle. \quad (1.109)\end{gathered}$$

Урахувавши (1.104), знайдемо

$$\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{2}\left(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2\right). \quad (1.110)$$

На основі отриманого результату для середньоквадратичного відхилення оператора $\mathbf{R}$ можемо записати таку нерівність

$$\delta R \geq \left(\frac{\hbar^2}{2}(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.111)$$

де

$$\delta R = \sqrt{\langle\Delta\mathbf{R}^2\rangle}, \quad (1.112)$$

тобто мінімальна довжина у тривимірному некомутативному фазовому просторі має такий вигляд

$$\delta R_{min} = \left(\frac{\hbar^2}{2}(\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2)\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.113)$$

Нерівність (1.83), яку було отримано у підрозділі 1.4.1, у тривимірному випадку можемо переписати як

$$\delta X_i \delta X_j \geq \frac{\hbar|\theta_{ij}|}{2}. \quad (1.114)$$

Тут важливо зауважити, що у загальному випадку параметри θ_{ij} є різними

$$\theta_{12} \neq \theta_{23} \neq \theta_{31}. \quad (1.115)$$

Отже, некомутативність координат (1.92) зумовлює наявність обмеження знизу на величину площі (мінімальної площі), а крім того, її анізотропію [30].

Аналізуючи співвідношення невизначеностей для координат, знайдемо також мінімальне значення для величини $\delta X_1 \delta X_2 \delta X_3$, яка відповідає об'єму. Із (1.114) запишемо такі три нерівності

$$\delta X_1 \delta X_2 \geq \frac{\hbar|\theta_{12}|}{2}, \tag{1.116}$$

$$\delta X_2 \delta X_3 \geq \frac{\hbar|\theta_{23}|}{2}, \tag{1.117}$$

$$\delta X_3 \delta X_1 \geq \frac{\hbar|\theta_{31}|}{2}. \tag{1.118}$$

Знайшовши добуток (1.116), (1.117), (1.118), отримаємо

$$(\delta X_1 \delta X_2 \delta X_3)^2 \geq \frac{\hbar^3}{8}|\theta_{12}\theta_{23}\theta_{31}|. \tag{1.119}$$

Тепер на основі (1.119) можемо записати нерівність, яка дає можливість визначити обмеження на об'єм у некомутативному просторі

$$\delta X_1 \delta X_2 \delta X_3 \geq \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}|\theta_{12}\theta_{23}\theta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \tag{1.120}$$

Звідси знаходимо, що мінімальний об'єм залежить від параметрів некомутативностей [30] та має такий вигляд

$$V_{min} = \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}|\theta_{12}\theta_{23}\theta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \tag{1.121}$$

З аналогічних міркувань, аналізуючи нерівність (1.106), можемо знайти мінімальну довжину, площу та об'єм в імпульсному просторі. Введемо оператор квадрата довжини в імпульсному просторі

$$\mathbf{P}^2 = \sum_i P_i^2. \tag{1.122}$$

Зауважимо, що оператори P_i задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (комутатор операторів імпульсів не дорівнює нулеві (1.94)). Запишемо середнє квадратичне відхилення для цього оператора

$$\langle \Delta \mathbf{P}^2 \rangle = \langle \Delta P_1^2 \rangle + \langle \Delta P_2^2 \rangle + \langle \Delta P_3^2 \rangle. \tag{1.123}$$

На основі аналогічних міркувань, як у випадку оператора довжини у координатному просторі, знайдемо таку нерівність

$$\delta P \geq \left(\frac{\hbar^2}{2} (\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2) \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{1.124}$$

де

$$\delta P = \sqrt{\langle \Delta \mathbf{R}^2 \rangle}. \tag{1.125}$$

Отже, мінімальну довжину у імпульсному просторі (мінімальний імпульс) визначають за параметрами імпульсної некомутативності як

$$\delta P_{min} = \left(\frac{\hbar^2}{2} (\eta_{12}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{31}^2) \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{1.126}$$

Для площі та об'єму в імпульсному просторі маємо такі обмеження

$$\delta P_i \delta P_j \geq \frac{\hbar |\eta_{ij}|}{2}, \tag{1.127}$$

$$\delta P_1 \delta P_2 \delta P_3 \geq \frac{\hbar^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} |\eta_{12}\eta_{23}\eta_{31}|^{\frac{1}{2}}. \tag{1.128}$$

Зауважимо, що відповідно до нерівностей (1.127), (1.128) мінімальна площа та мінімальний об'єм визначають за параметрами імпульсної некомутативності. Тут також важливо звернути увагу, що

$$\eta_{12} \neq \eta_{23} \neq \eta_{31}. \tag{1.129}$$

Тому імпульсна некомутативність зумовлює наявність анізотропії мінімальної площі у імпульсному просторі .

1.5 Алгебри з некомутативністю типу Лі

Алгебрам з некомутативністю типу Лі властиве таке співвідношення для операторів координат

$$[X_i, X_j] = i\hbar \theta_{ij}^k X_k. \tag{1.130}$$

Тут θ^k_{ij} – константи. Параметри θ^k_{ij} є антисиметричними за нижніми індексами $\theta^k_{ij} = -\theta^k_{ji}$ та названі *параметрами некомутативності* [31–34].

У літературі існують різні типи некомутативних алгебр (1.130), а саме: розрізняють некомутативну алгебру Лі типу в якій комутатор координат пропорційний до часу. Така алгебра має вигляд

$$[X_i, X_j] = \frac{i\hbar t}{\kappa}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{1.131}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.132}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{1.133}$$

(див. статті [31, 35])). Тут $i, j = (1, 2, 3)$, ρ, τ – деякі фіксовані індекси, причому $\rho \neq \tau$, κ – параметр.

У разі некомутативної алгебри Лі типу, в якій комутатор для координат пропорційний координаті, співвідношення мають такий вигляд

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{X_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [X_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{X_k}{\tilde{\kappa}}, \tag{1.134}$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [P_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \tag{1.135}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \tag{1.136}$$

$$[X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0. \tag{1.137}$$

Тут $k, l, \gamma = (1, 2, 3)$, $i \neq \gamma$, $j \neq \gamma$, $m, n = (1, 2, 3)$, індекси k, l, γ є фіксовані та різні, $\tilde{\kappa}$ – константа (див. статтю [31]).

Також відомою є більш загальна некомутативна алгебра канонічного типу, яка характеризується співвідношеннями

$$[X_i, X_j] = i\hbar(\theta^0_{ij}t + \theta^k_{ij}X_k), \tag{1.138}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \bar{\theta}^k_{ij}X_k + \tilde{\theta}^k_{ij}P_k), \tag{1.139}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{1.140}$$

Тут $i, j, k = (1, 2, 3)$, θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar{\theta}^k_{ij}$, $\tilde{\theta}^k_{ij}$ – параметри некомутативності, які є константами [36]. Для цих параметрів виконуються співвідношення

$$\theta^0_{ij} = -\theta^0_{ji}, \quad \theta^k_{ij} = -\theta^k_{ji}, \tag{1.141}$$

$$\bar{\theta}^k_{ij} = -\bar{\theta}^k_{ji}, \quad \tilde{\theta}^k_{ij} = -\tilde{\theta}^k_{ji}. \tag{1.142}$$

Важливо зауважити, що параметри θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar\theta^k_{ij}$, $\tilde\theta^k_{ij}$ не можуть бути довільні, оскільки має бути виконана тотожність Якобі для будь-якої трійки операторів. Із тотожності Якобі випливає, що ми не можемо розглядати довільні параметри θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar\theta^k_{ij}$, $\tilde\theta^k_{ij}$. Тотожність Якобі задовольняється, коли

$$\theta^0_{kl} = -\theta^0_{k\gamma} = \frac{1}{\kappa}, \tag{1.143}$$

$$\theta^0_{l\gamma} = \frac{1}{\kappa}, \tag{1.144}$$

$$\theta^l_{k\gamma} = -\theta^k_{l\gamma} = \tilde\theta^l_{k\gamma} = -\tilde\theta^k_{l\gamma} = \frac{1}{\tilde\kappa}, \tag{1.145}$$

тут k, l, γ є різні та фіксовані. У цьому випадку некомутативна алгебра Лі типу має вигляд

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\left(-\frac{t}{\kappa} + \frac{X_l}{\tilde\kappa}\right), \tag{1.146}$$

$$[X_l, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{t}{\kappa} - \frac{X_k}{\tilde\kappa}\right), \tag{1.147}$$

$$[X_k, X_l] = i\hbar\frac{t}{\kappa}, \quad [P_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{P_l}{\tilde\kappa}, \tag{1.148}$$

$$[P_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{P_k}{\tilde\kappa}, \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.149}$$

$$[X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \quad [P_m, P_n] = 0, \tag{1.150}$$

(див. [36]). Поклавши у (1.138)–(1.140)

$$\theta^0_{l\gamma} = -\theta^0_{k\gamma} = \frac{1}{\kappa}, \tag{1.151}$$

$$\theta^l_{k\gamma} = -\theta^k_{l\gamma} = \frac{1}{\tilde\kappa}, \tag{1.152}$$

$$\tilde\theta^l_{k\gamma} = -\tilde\theta^k_{l\gamma} = \bar\theta^l_{k\gamma} = -\bar\theta^k_{l\gamma} = \frac{1}{\bar\kappa}, \tag{1.153}$$

(індекси k, l, γ є різні та фіксовані), отримаємо таку алгебру

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\left(-\frac{t}{\kappa} + \frac{X_l}{\tilde\kappa}\right), \tag{1.154}$$

$$[X_l, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{t}{\kappa} - \frac{X_k}{\tilde{\kappa}}\right), \quad (1.155)$$

$$[P_k, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{X_l}{\bar{\kappa}} + \frac{P_l}{\tilde{\kappa}}\right), \quad [P_l, X_\gamma] = i\hbar\left(\frac{X_k}{\bar{\kappa}} - \frac{P_k}{\tilde{\kappa}}\right), \quad (1.156)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \quad (1.157)$$

$$[X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0, \quad (1.158)$$

k, l, γ є різні та фіксовані.

1.6 Задачі

1. Записати співвідношення невизначеностей для операторів координат та імпульсів у квантованому просторі з алгеброю Кемпфа

$$[X_i, X_j] = -i\hbar\frac{(2\beta - \beta') + (2\beta + \beta')\beta P^2}{1 + \beta P^2}(X_i P_j - X_j P_i),$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + \beta' P_i P_j),$$
$$[P_i, P_j] = 0,$$

   та отримати вираз для мінімальної довжини.

2. У шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу на основі аналізу співвідношень невизначеностей для операторів координат та імпульсів отримати у імпульсному просторі:
   а) мінімальну довжину; б) мінімальну площу; в) мінімальний об'єм.

3. Знайти зображення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів, які задовольняють некомутативну алгебру канонічного типу

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij},$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij},$$
$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij},$$

   Розглянути двовимірний випадок $(i, j = (1, 2))$.

4. Отримати рівняння для параметрів некомутативностей θ^0_{ij}, θ^k_{ij}, $\bar{\theta}^k_{ij}$, $\tilde{\theta}^k_{ij}$ у квантованому просторі з алгеброю Лі типу

$$\begin{aligned}
[X_i, X_j] &= i\hbar(\theta^0_{ij} t + \theta^k_{ij} X_k), \\
[X_i, P_j] &= i\hbar(\delta_{ij} + \bar{\theta}^k_{ij} X_k + \tilde{\theta}^k_{ij} P_k), \\
[P_i, P_j] &= 0.
\end{aligned}$$

при виконанні яких алгебра є сумісною (справджується тотожність Якобі).

Розділ 2

Найпростіші квантові задачі у просторі з мінімальною довжиною

2.1 Власні значення оператора квадрата довжини у двовимірному квантованому просторі канонічного типу

2.1.1 Оператор квадрата довжини

Розглянемо оператор квадрата довжини

$$R^2 = X_1^2 + X_2^2 \tag{2.1}$$

у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{2.2}$$
$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar, \tag{2.3}$$
$$[P_1, P_2] = [X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0, \tag{2.4}$$

та знайдемо його власні значення. Зручно перейти до координат та імпульсів для яких комутаційні співвідношення є звичними

$$[x_1, x_2] = 0, \tag{2.5}$$

$$[x_1, p_1] = [x_2, p_2] = i\hbar. \tag{2.6}$$

$$[p_1, p_2] = 0. \tag{2.7}$$

Використавши симетричне зображення (1.78), (1.79), можемо переписати оператор R^2 в такому вигляді:

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{\theta^2}{4}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - \theta(xp_y - yp_x). \tag{2.8}$$

Означимо безрозмірні оператори

$$\xi_1 = \frac{x_1}{l}, \tag{2.9}$$

$$\xi_2 = \frac{x_2}{l}, \tag{2.10}$$

де величина l має вигляд

$$l = \sqrt{\frac{\hbar\theta}{2}}. \tag{2.11}$$

Перепишемо оператор R^2 через ξ_1, ξ_2 (2.9), (2.10) та отримаємо

$$R^2 = \frac{\hbar\theta}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{d^2}{d\xi_1^2} + \frac{d^2}{d\xi_2^2}\right) - \\ + i\hbar\theta(\xi_1\frac{d}{d\xi_2} - \xi_2\frac{d}{d\xi_1}). \tag{2.12}$$

Для знаходження власних значень R^2 уведемо такі оператори

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_1 + \frac{d}{d\xi_1}\right), \tag{2.13}$$

$$b_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_1 - \frac{d}{d\xi_1}\right), \tag{2.14}$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_2 + \frac{d}{d\xi_2}\right), \tag{2.15}$$

$$b_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi_2 - \frac{d}{d\xi_2}\right). \tag{2.16}$$

Важливо зауважити, що для b_1, b_2, b_1^+, b_2^+ справджуються такі комутаційні співвідношення

$$[b_1, b_1^+] = [b_2, b_2^+] = 1, \tag{2.17}$$
$$[b_1, b_2] = [b_1^+, b_2^+] = [b_1, b_2^+] = [b_1^+, b_2] = 0. \tag{2.18}$$

Із виразів (2.13)-(2.16) знайдемо

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_1 + b_1^+\right), \tag{2.19}$$
$$\frac{d}{d\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_1 - b_1^+\right), \tag{2.20}$$
$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_2 + b_2^+\right), \tag{2.21}$$
$$\frac{d}{d\xi_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_2 - b_2^+\right). \tag{2.22}$$

Урахувавши (2.19)-(2.22), можна записати

$$R^2 = \hbar\theta(b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2 + 1) + i\hbar\theta(b_1^+ b_2 - b_2^+ b_1). \tag{2.23}$$

Зауважимо, що перші три доданки у (2.23) рівнозначні гамільтоніану двовимірного гармонічного осцилятора з частотою θ. Останні два доданки у (2.23) мають недіагональний вигляд $i\hbar\theta(b_1^+ b_2 - b_2^+ b_1)$. Щоб звести R^2 до діагонального вигляду, введемо такі оператори

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_1 + ib_2\right), \tag{2.24}$$
$$B_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_1^+ - ib_2^+\right), \tag{2.25}$$
$$B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-b_1 + ib_2\right), \tag{2.26}$$
$$B_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-b_1^+ - ib_2^+\right). \tag{2.27}$$

Знайшовши комутаційні співвідношення для операторів B_1, B_2, B_1^+, B_2^+, отримаємо

$$[B_1, B_1^+] = \frac{1}{2}[b_1 + ib_2, b_1^+ - ib_2^+] = 1, \tag{2.28}$$

$$[B_2, B_2^+] = \frac{1}{2}[-b_1 + ib_2, -b_1^+ - ib_2^+] = 1, \tag{2.29}$$

$$[B_1, B_2] = \frac{1}{2}[b_1 + ib_2, -b_1 + ib_2] = 0, \tag{2.30}$$

$$[B_1^+, B_2^+] = \frac{1}{2}[b_1^+ - ib_2^+, -b_1^+ - ib_2^+] = 0, \tag{2.31}$$

$$[B_1, B_2^+] = \frac{1}{2}[b_1 + ib_2, -b_1^+ - ib_2^+] = 0, \tag{2.32}$$

$$[B_1^+, B_2] = \frac{1}{2}[b_1^+ - ib_2^+, -b_1 + ib_2] = 0. \tag{2.33}$$

Звернемо увагу, що для операторів B_1, B_2, B_1^+, B_2^+ виконуються такі рівності

$$B_1^+ B_1 + B_2^+ B_2 = b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2, \tag{2.34}$$

$$B_1^+ B_1 - B_2^+ B_2 = i(b_1^+ b_2 - b_2^+ b_1). \tag{2.35}$$

Отже, оператор квадрата довжини можемо записати у вигляді

$$R^2 = 2\hbar\theta \left(B_1^+ B_1 + \frac{1}{2} \right). \tag{2.36}$$

2.1.2 Власні значення оператора квадрата довжини. Мінімальні довжина та площа

У попередньому підрозділі ми переписали оператор R^2 у вигляді (2.36), який відповідає оператору Гамільтона одновимірного гармонічного осцилятора з частотою 2θ (оператори B_1, B_1^+ задовольняють $[B_1, B_1^+] = 1$ (див. (2.28)). Власні значення оператора квадрата довжини мають такий вигляд

$$R_n^2 = 2\hbar\theta \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2... \tag{2.37}$$

Звернемо увагу, що некомутативність координат зумовлює дискретність власних значень оператора квадрата довжини. Із (2.37) можемо зробити висновок, що мінімальну довжину у двовимірному просторі з некомутативною алгеброю канонічного типу визначають як

$$R_0 = \sqrt{\hbar\theta}. \tag{2.38}$$

Нагадаємо, що у просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів власні значення оператора квадрата довжини є неперервними. Оператор

$$S = \pi R^2 \tag{2.39}$$

є оператором площі кола. На основі отриманого результату для власних значень оператора квадрата довжини (2.37) можемо записати власні значення оператора площі

$$S_n = 2\pi\hbar\theta\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{2.40}$$

Некомутативність координат зумовлює квантування площі (див. [37]). Мінімальну площу визначаєть за параметром некомутативності, вона має такий вигляд

$$S_{min} = \pi\hbar\theta. \tag{2.41}$$

2.2 Гармонічний осцилятор у некомутативному просторі канонічного типу

2.2.1 Гамільтоніан гармонічного осцилятора у некомутативному просторі

Розглянемо двовимірну некомутативну алгебру канонічного типу (1.69)-(1.71) та знайдемо вплив квантованості простору на енергетичні рівні гармонічного осцилятора. Зауважимо, що дослідженню гармонічного осцилятора приділяли багато уваги (див., для прикладу, [38–41] та посилання у них). Гамільтоніан двовимірного гармонічного осцилятора з масою m та частотою ω має вигляд

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2 X_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 X_2^2}{2}. \tag{2.42}$$

Тут координати та імпульси задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (2.2)-(2.4). Зручно перейти до зображення (1.78), (1.79) та переписати оператор Гамільтона у такому вигляді

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x_1 - \frac{\theta}{2}p_2\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(x_2 + \frac{\theta}{2}p_1\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2m} + \frac{m\omega^2\theta^2}{8}\right)p_1^2 + \left(\frac{1}{2m} + \frac{m\omega^2\theta^2}{8}\right)p_2^2 +$$
$$+\frac{m\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_2^2}{2} + \frac{m\omega^2\theta}{2}\left(x_2 p_1 - x_1 p_2\right). \tag{2.43}$$

Уведемо такі позначення

$$\frac{1}{m_{eff}} = \frac{1}{m} + \frac{m\omega^2\theta^2}{4}, \tag{2.44}$$

$$m_{eff} = \frac{4m}{4 + m^2\omega^2\theta^2}, \tag{2.45}$$

$$\omega_{eff} = \omega\sqrt{\frac{4 + m^2\theta^2\omega^2}{4}} \tag{2.46}$$

та запишемо гамільтоніан через безрозмірні оператори

$$\xi_1 = \frac{x_1\sqrt{m_{eff}\omega_{eff}}}{\sqrt{\hbar}}, \tag{2.47}$$

$$\xi_2 = \frac{x_2\sqrt{m_{eff}\omega_{eff}}}{\sqrt{\hbar}}. \tag{2.48}$$

Отримаємо:

$$H = \frac{\hbar\omega_{eff}}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{d^2}{d\xi_1^2} + \frac{d^2}{d\xi_2^2}\right) -$$
$$-i m_{eff}\omega_{eff}^2\hbar\theta\left(\xi_1\frac{d}{d\xi_2} - \xi_2\frac{d}{d\xi_1}\right). \tag{2.49}$$

Увівши (2.13)-(2.16), (2.24)-(2.27), знайдемо такий вираз для оператора Гамільтона

$$H = \hbar\omega_{eff}\left(B_1^+ B_1 + B_2^+ B_2 + 1\right) +$$
$$+ m_{eff}\omega_{eff}^2\hbar\theta(B_1^+ B_1 - B_2^+ B_2). \tag{2.50}$$

Зауважимо, що оператор (2.50) має діагональний вигляд (містить тільки доданки, пропорційні до $B_1^+B_1$, $B_2^+B_2$, не містить перехресних доданків типу $B_1^+B_2$, $B_2^+B_1$).

2.2.2 Вплив квантованості простору на енергетичні рівні гармонічного осцилятора

Зважаючи на те, що виконується рівність

$$[B_1^+B_1, B_2^+B_2] = 0, \tag{2.51}$$

оператори B_1, B_1^+, B_2, B_2^+ задовольняють комутаційні співвідношення (2.28)-(2.33), а також те, що власні значення операторів $B_1^+B_1$, $B_2^+B_2$ є n_1, n_2, відповідно, (n_1, n_2 – квантові числа $n_1 = 0, 1, 2...$, $n_2 = 0, 1, 2...$), знайдемо такі енергетичні рівні гармонічного осцилятора у некомутативному просторі канонічного типу

$$\begin{aligned} E_{n_1,n_2} = \hbar\omega_{eff}\,(n_1 + n_2 + 1) + m_{eff}\omega_{eff}^2\hbar\theta(n_1 - n_2) = \\ = \left(\hbar\omega_{eff} - m_{eff}\omega_{eff}^2\hbar\theta\right)\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \\ \left(\hbar\omega_{eff} + m_{eff}\omega_{eff}^2\hbar\theta\right)\left(n_2 + \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{2.52}$$

де $n_1 = 0, 1, 2...$, $n_2 = 0, 1, 2...$. З отриманого результату (2.52) можемо зробити висновок, що некомутативність координат впливає на частоту осцилятора. Вираз (2.52) відповідає спектру неоднорідного двовимірного осцилятора з частотами

$$\omega_- = \omega_{eff} - m_{eff}\omega_{eff}^2\theta, \tag{2.53}$$

$$\omega_+ = \omega_{eff} + m_{eff}\omega_{eff}^2\theta. \tag{2.54}$$

Звернемо увагу, що у границі $\theta \to 0$ із (2.52) знайдемо добре відомий результат для енергетичних рівнів однорідного двовимірного гармонічного осцилятора у звичному просторі:

$$E_{n_1,n_2} = \hbar\omega\,(n_1 + n_2 + 1)\,. \tag{2.55}$$

2.3 Гармонічний осцилятор у деформованому просторі. Метод суперсиметрії (факторизації)

2.3.1 Факторизація гамільтоніану

Розглянемо задачу на знаходження енергетичних рівнів одновимірного гармонічного осцилятора у просторі з мінімальною довжиною

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar(1 + \beta\hat{P}^2). \tag{2.56}$$

Гамільтоніан гармонічного осцилятора має звичний вигляд

$$H = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{X}^2, \tag{2.57}$$

проте оператори координати та імпульсу задовольняють деформовані комутаційні співвідношення.

Зручно перейти до безрозмірних операторів координати та імпульсу

$$\hat{X} = a\hat{q}, \tag{2.58}$$

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{a}\hat{\pi}, \tag{2.59}$$

які задовольняють таке деформоване комутаційне співвідношення

$$[\hat{q}, \hat{\pi}] = i\hbar(1 + \beta'\hat{\pi}^2). \tag{2.60}$$

Тут β' — безрозмірний параметр деформації

$$\beta' = \frac{\beta\hbar^2}{a^2}. \tag{2.61}$$

Запишемо гамільтоніан через безрозмірні оператори

$$H = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\hat{\pi}^2 + \frac{m\omega^2 a^2}{2}\hat{q}^2. \tag{2.62}$$

Для зручності виберемо a так, щоб виконувалася така рівність

$$\frac{\hbar^2}{ma^2} = m\omega^2 a^2. \tag{2.63}$$

Звідки знаходимо

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \tag{2.64}$$

Тоді гамільтоніан перепишемо як

$$H = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\hat{q}^2\right) = \hbar\omega h, \tag{2.65}$$

де оператор h безрозмірний

$$h = \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\hat{q}^2. \tag{2.66}$$

2.3.2 Знаходження спектра та хвильових функцій

Розглянемо рівняння на власні значення та власні вектори безрозмірного гамільтоніана

$$h|\psi\rangle = \epsilon|\psi\rangle. \tag{2.67}$$

Для розв'язання цього рівняння використаємо метод суперсиметрії. Першим кроком у цьому методі є факторизація гамільтоніана

$$h = a^+a + \epsilon_0. \tag{2.68}$$

Оператори a і a^+ виберемо аналогічно недеформованому випадку

$$a = a(g_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ig_0\hat{\pi} + \hat{q}), \tag{2.69}$$

$$a^+ = a^+(g_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ig_0\hat{\pi} + \hat{q}), \tag{2.70}$$

де $g_0 > 0$. Підставляючи ці оператори у (2.68) знаходимо

$$h = \frac{1}{2}\left((-ig_0\hat{\pi} + \hat{q})(ig_0\hat{\pi} + \hat{q}) + 2\epsilon_0\right) = \tag{2.71}$$

$$\frac{1}{2}\left(g_0^2\hat{\pi}^2 + \hat{q}^2 + ig_0[\hat{q}, \hat{\pi}] + 2\epsilon_0\right). \tag{2.72}$$

Урахувавши (2.60), мажемо записати такий вираз для гамільтоніана

$$h = \frac{1}{2}\left(g_0(g_0-1)\hat{\pi}^2 + \hat{q}^2 - g_0 + 2\epsilon_0\right), \tag{2.73}$$

звідки отримаємо рівняння

$$g_0(g_0-\beta') = 1, \tag{2.74}$$

$$-g_0 + 2\epsilon_0 = 0. \tag{2.75}$$

Розв'язки рівнянь мають вигляд

$$g_0 = \frac{\beta'}{2} + \sqrt{1+\frac{\beta'^2}{4}}, \tag{2.76}$$

$$\epsilon_0 = \frac{g_0}{2}, \tag{2.77}$$

де враховано, що $g_0 > 0$.

Рівняння на власні значення h зведемо до рівняння

$$a^+a|\psi^-\rangle = \epsilon'|\psi^-\rangle, \tag{2.78}$$

$$\epsilon' = \epsilon - \epsilon_0. \tag{2.79}$$

Подіємо на ліву і праву частини цього рівняння оператором a

$$aa^+(a|\psi^-\rangle) = \epsilon'(a|\psi^-\rangle). \tag{2.80}$$

Ми отримали рівняння на власні значення оператора aa^+

$$aa^+|\psi^+\rangle = \epsilon'|\psi^+\rangle, \tag{2.81}$$

де

$$a|\psi^-\rangle = C_-|\psi^+\rangle, \tag{2.82}$$

тут C — константа нормування. У методі суперсиметрії a^+a і aa^+ називають *суперсиметричними партнерами* .

Подіємо на ліву і праву частини рівняння (2.81) оператором a^+

$$a^+a(a^+|\psi^+\rangle) = \epsilon'(a^+|\psi^+\rangle), \tag{2.83}$$

На основі отриманого результату можемо записати таку рівність

$$a^+|\psi^+\rangle = C_+|\psi^-\rangle. \tag{2.84}$$

З умови нормування

$$\langle\psi^-|\psi_-\rangle = 1, \tag{2.85}$$
$$\langle\psi^+|\psi_+\rangle = 1, \tag{2.86}$$

знаходимо

$$C_- = C_+ = \sqrt{\epsilon}', \tag{2.87}$$

і, отже,

$$a|\psi^-\rangle = \sqrt{\epsilon}'|\psi^+\rangle, \tag{2.88}$$
$$a^+|\psi^+\rangle = \sqrt{\epsilon}'|\psi^-\rangle. \tag{2.89}$$

Ці перетворення пов'язують власні стани суперсиметричних партнерів. Їх називають *суперсиметричними перетвореннями.* Зауважимо, що всі ненульові енергетичні рівні суперсиметричних партнерів збігаються, нульовий енергетичний рівень існує тільки для одного з них. В даному випадку ($g > 0$) нульовий рівень $\epsilon = 0$ існує для a^+a, його власна функція задовольняє рівняння

$$a(g_0)|\psi_0^-\rangle = 0. \tag{2.90}$$

Для знаходження наступного рівня a^+a розглянемо суперсиметричний партнер aa^+ і перепишемо його так

$$a(g_0)a^+(g_0) = a^+(g_1)a(g_1) + \epsilon_1. \tag{2.91}$$

Це співвідношення називають *умовою формінваріантності* . Оскільки найнижчий рівень $a^+(g_1)a(g_1)$ дорівнює нулю, то найнижчий рівень $a(g_0)a^+(g_0)$ є ϵ_1. Тому перший збуджений рівень $a^+(g_1)a(g_1)$ є ϵ_1. Для знаходження ϵ_1 випишемо рівняння (2.91) у явному вигляді

$$g_0(g_0 + \beta') = g_1(g_1 - \beta'), \tag{2.92}$$
$$\frac{1}{2}g_0 = -\frac{1}{2}g_1 + \epsilon_1. \tag{2.93}$$

Звідки з урахуванням того, що $g_1 > 0$, знаходимо такі співвідношення

$$g_1 = g_0 + \beta', \tag{2.94}$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}(g_0 + g_1). \tag{2.95}$$

Продовжуючи описану процедуру, отримаємо

$$g_{i+1} = g_i + \beta', \tag{2.96}$$

$$\epsilon_{i+1} = \frac{1}{2}(g_{i+1} + g_i). \tag{2.97}$$

Отже, можемо записати:

$$g_i = g_0 + \beta' i, \tag{2.98}$$

$$\epsilon_{i+1} = g_0 + \beta'(i + \frac{1}{2}). \tag{2.99}$$

Тоді рівні оператора a^+a такі

$$\epsilon'_n = \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_{i+1} =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(g_0 + \beta'(i + \frac{1}{2}) \right) = \left(g_0 + \frac{\beta'}{2} \right) n + \beta' \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= g_0 n + \beta' \frac{n^2}{2}. \tag{2.100}$$

Запишемо енергетичні рівні гамільтоніану h

$$\epsilon_n = \frac{g_0}{2} + \epsilon'_n = g_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta' \frac{n^2}{2}. \tag{2.101}$$

Енергетичний спектр вихідного деформованого гармонічного осцилятора має вигляд

$$E_n = \hbar\omega\epsilon_n. \tag{2.102}$$

При $\beta \to 0$ параметр $g_0 \to 1$, а отриманий результат відтворює спектр недеформованого гармонічного осцилятора.

На завершення зауважимо, що власні стани, які відповідають відповідним енергетичним рівням, також можуть бути знайдені в рамках суперсиметричного методу. Використовуючи суперсиметричні перетворення і умову формінваріантності, знайдемо

$$|\psi_1^-(g_0)\rangle = Ca^+(g_0)|\psi_0^-(g_1)\rangle, \tag{2.103}$$

$$|\psi_2^-(g_0)\rangle = Ca^+(g_0)a^+(g_1)|\psi_0^-(g_2)\rangle, \tag{2.104}$$

$$|\psi_3^-(g_0)\rangle = Ca^+(g_0)a^+(g_1)a^+(g_2)|\psi_0^-(g_3)\rangle, \tag{2.105}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\psi_n^-(g_0)\rangle = Ca^+(g_0)a^+(g_1)...a^+(g_{n-1})|\psi_0^-(g_n)\rangle. \tag{2.106}$$

Основний стан задовольняє рівняння (2.90), $a(g_i)|\psi_0^-(g_i)\rangle = 0$. Явний вигляд цих власних станів гармонічного осцилятора можемо знайти в рамках певного зображення деформованих операторів координати та імпульсу [42].

2.4 Задачі

1. Для операторів B_1, B_1^+, B_2, B_2^+ (2.24)-(2.27), показати, що виконуються рівності:

$$B_1^+B_1 + B_2^+B_2 = b_1^+b_1 + b_2^+b_2,$$
$$B_1^+B_1 - B_2^+B_2 = i(b_1^+b_2 - b_2^+b_1).$$

2. Знайти енергетичні рівні вільної частинки у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta,$$
$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar,$$
$$[X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0$$
$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta,$$

   $\theta = \text{const}$, $\eta = \text{const}$.

3. Знайти мінімальну довжину у імпульсному просторі на основі аналізу власних значень оператора квадрата імпульсу в рамках алгебри з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу (див. задачу 2).

4. Дослідити вираз для спектра гармонічного осцилятора у некомутативному просторі (2.52) при $\theta \to 0$.

5. Знайти енергетичні рівні двовимірного гармонічного осцилятора у чотиривимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= i\hbar\theta, \\ [X_1, P_1] = [X_2, P_2] &= i\hbar(1+\sigma), \\ [X_1, P_2] = [X_2, P_1] &= 0 \\ [P_1, P_2] &= i\hbar\eta, \end{aligned}$$

   $\theta = \mathrm{const}$, $\eta = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$.

6. Знайти явний вигляд власних станів гармонічного осцилятора $|\psi_1^-(g_0)\rangle$, $|\psi_2^-(g_0)\rangle$, $|\psi_3^-(g_0)\rangle$ у деформованому просторі з мінімальною довжиною

$$[X_1, P_1] = i\hbar(1 + \beta P^2),$$

   в рамках квазікоординатного зображення.

Розділ 3

Система багатьох частинок у квантованому просторі

3.1 Координати та імпульси центра мас і відносного руху у некомутативному фазовому просторі

3.1.1 Узагальнення некомутативної алгебри для координат та імпульсів різних частинок

Розглянемо чотиривимірний квантований фазовий простір канонічного типу, який характеризують за такими співвідношеннями

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{3.1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{3.2}$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta, \tag{3.3}$$

де $i, j = (1, 2)$. Зауважимо, що у класичній границі $\hbar \to 0$ з комутаційних співвідношень (3.1)-(3.3) отримаємо деформовані дужки Пуассона

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \tag{3.4}$$

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}, \tag{3.5}$$

$$\{P_1, P_2\} = \eta. \tag{3.6}$$

Щоб забезпечити виконання (3.4)-(3.6), дужки Пуассона для функцій f, g означають як

$$\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) + \\ +\theta \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial g}{\partial X_2} - \frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{\partial g}{\partial X_1} \right) + \\ +\eta \left(\frac{\partial f}{\partial P_1}\frac{\partial g}{\partial P_2} - \frac{\partial f}{\partial P_2}\frac{\partial g}{\partial P_1} \right). \qquad (3.7)$$

Розглянемо систему N частинок з масами m_a у чотиривимірному квантованому фазовому просторі канонічного типу. Нехай $X_i^{(a)}$, $P_i^{(a)}$ – координати та імпульси частинки з індексом a. Некомутативна алгебра (3.1)-(3.3) може бути узагальнена як [43]

$$[X_1^{(a)}, X_2^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}\theta^{(a)}, \qquad (3.8)$$

$$[X_i^{(a)}, P_j^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}\delta_{ij}, \qquad (3.9)$$

$$[P_1^{(a)}, P_2^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}\eta^{(a)}. \qquad (3.10)$$

Звернемо увагу на те, що у комутаційних співвідношеннях параметри некомутативності є різними для різних частинок. Координати та імпульси частинки з індексом a задовольняють некомутативну алгебру з параметрами $\theta^{(a)}$, $\eta^{(a)}$. Також зауважимо, що координати та імпульси різних частинок комутують. У класичній границі зі співвідношень (3.8)-(3.10) отримаємо такі дужки Пуассона

$$\{X_1^{(a)}, X_2^{(b)}\} = \delta^{ab}\theta_a, \qquad (3.11)$$

$$\{X_i^{(a)}, P_j^{(b)}\} = \delta^{ab}, \qquad (3.12)$$

$$\{P_1^{(a)}, P_2^{(b)}\} = \delta^{ab}\eta_a. \qquad (3.13)$$

У наступному підрозділі дослідимо співвідношення некомутативної алгебри для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху у некомутативному фазовому просторі.

3.1.2 Ефективні параметри некомутативності

Уведемо координати та імпульси центра мас системи N частинок у квантованому фазовому просторі у звичному вигляді

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}, \tag{3.14}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \mu_a \mathbf{X}^{(a)}, \tag{3.15}$$

$$\mu_a = \frac{m_a}{M}, \tag{3.16}$$

$$M = \sum_a m_a. \tag{3.17}$$

Також означимо традиційно координати та імпульси відносного руху

$$\Delta\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{X}^{(a)} - \tilde{\mathbf{X}}, \tag{3.18}$$

$$\Delta\mathbf{P}^{a} = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a\tilde{\mathbf{P}}. \tag{3.19}$$

Урахувавши те, що для координат та імпульсів частинок справджується співвідношення (3.11)-(3.13), для координат та імпульсів центра мас знайдемо

$$\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\} = \left\{\sum_a \mu_a X_1^{(a)}, \sum_a \mu_a X_2^{(a)}\right\} = \frac{\sum_a m_a^2\theta_a}{(\sum_b m_b)^2}, \tag{3.20}$$

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{P}_j\} = \left\{\sum_a \mu_a X_1^{(a)}, \sum_a P_j^{(a)}\right\} = \delta^{ab}\delta_{ij}, \tag{3.21}$$

$$\{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2\} = \left\{\sum_a P_1^{(a)}, \sum_a P_2^{(a)}\right\} = \sum_a \eta_a. \tag{3.22}$$

Звернемо увагу, що дужки Пуассона для координат та імпульсів (3.20), (3.22) дорівнюють величинам

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_a m_a^2\theta_a}{(\sum_b m_b)^2}, \tag{3.23}$$

$$\tilde{\eta} = \sum_a \eta_a, \tag{3.24}$$

які називають *ефективними параметрами некомутативності* [43]. Зауважимо, що $\tilde{\theta}$, $\tilde{\eta}$ визначають через параметри некомутативності θ_a, η_a, які відповідають частинкам, що входять до системи.

Дослідимо отримані вирази для ефективних параметрів некомутативності. Для цього розглянемо систему N частинок з однаковими масами $m_a = m$ та однаковими параметрами координатної та імпульсної некомутативностей

$$\theta_a = \theta, \quad \eta_a = \eta. \tag{3.25}$$

У цьому випадку

$$\sum_b m_b^2 = N^2 m^2, \tag{3.26}$$

$$\sum_a m_a^2 \theta_a = N m^2 \theta. \tag{3.27}$$

Маємо:

$$\tilde{\theta} = \frac{N m^2 \theta}{N^2 m^2} = \frac{\theta}{N}, \tag{3.28}$$

$$\tilde{\eta} = N\eta. \tag{3.29}$$

Із отриманих виразів можна зробити висновок, що ефективний параметр координатної некомутативності зменшується зі збільшенням кількості частинок у системі як $1/N$. Ефективний параметр імпульсної некомутативності пропорційний до кількості частинок у системі N.

Дослідимо також дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас та відносного руху. Врахувавши деформацію дужок Пуассона для координат та імпульсів частинок (3.11)-(3.13), знайдемо

$$\{\tilde{X}_1, \Delta X_2^{(a)}\} = \{\sum_a \mu_a X_1^{(a)}, X_2^{(a)} - \sum_b \mu_b X_2^{(b)}\} = \mu_a \theta_a - \tilde{\theta}, \tag{3.30}$$

$$\{\tilde{X}_2, \Delta X_1^{(a)}\} = \{\sum_a \mu_a X_2^{(a)}, X_1^{(a)} - \sum_b \mu_b X_1^{(b)}\} = \tilde{\theta} - \mu_a \theta_a, \tag{3.31}$$

$$\{\tilde{P}_1, \Delta P_2^{(a)}\} = \{\sum_b P_1^{(b)}, P_2^{(a)} - \mu_a \sum_c P_2^{(c)}\} = \eta_a - \mu_a \sum_b \eta_b, \tag{3.32}$$

$$\{\tilde{P}_2, \Delta P_1^{a}\} = \{\sum_b P_2^{(b)}, P_1^{(a)} - \mu_a \sum_c P_1^{(c)}\} = \mu_a \sum_b \eta_b - \eta_a. \tag{3.33}$$

Звернемо увагу, що дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху не дорівнюють нулю. Відносний рух впливає на рух центра мас та навпаки. Обчислимо також дужки Пуассона для координат та імпульсів відносного руху. Знайдемо

$$\begin{aligned}\{\Delta X_1^{(a)}, \Delta X_2^{(b)}\} = -\{\Delta X_2^{(a)}, \Delta X_1^{(b)}\} = \\ = \delta^{ab}\theta_a - \mu_a\theta_a - \mu_b\theta_b + \tilde{\theta},\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\{\Delta P_1^{(a)}, \Delta P_2^{(b)}\} = -\{\Delta P_2^{(a)}, \Delta P_1^{(b)}\} = \\ = \delta^{ab}\eta_a - \mu_b\eta_a - \mu_a\eta_b + \mu_a\mu_b\tilde{\eta},\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\{\Delta X_i^{(a)}, \Delta P_j^{(b)}\} = \delta_{ij}(\delta_{ab} - \mu_b). \tag{3.36}$$

Бачимо, що дужки Пуассона для координат та імпульсів відносного руху залежать від параметрів координатної та імпульсної некомутативностей, які відповідають частинкам системи.

3.2 Двочастинкова задача у квантованому просторі канонічного типу

3.2.1 Координати та імпульси центра мас і відносного руху

Розглянемо систему двох частинок з масами m_1, m_2, які взаємодіють між собою. Таку систему описують гамільтоніаном

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|), \tag{3.37}$$

тут $U(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|)$ – потенціальна енергія взаємодії частинок. Зауважмо, що дужки Пуассона для координат та імпульсів частинок деформовані (3.11)-(3.13). Перепишемо гамільтоніан системи через координати та імпульси центра мас (3.14), (3.15), координати та імпульси відносного руху

$$\mathbf{X}^r = \Delta\mathbf{X}^{(2)} - \Delta\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \tag{3.38}$$

$$\mathbf{P}^r = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{P}^{(2)} - \Delta\mathbf{P}^{(1)}) = \mu_1\mathbf{P}^{(2)} - \mu_2\mathbf{P}^{(1)}, \tag{3.39}$$

$$H = \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + \frac{(\mathbf{P}^r)^2}{2\mu} + U(|\mathbf{X}^r|), \tag{3.40}$$

де

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}, \tag{3.41}$$

$$M = m_1 + m_2. \tag{3.42}$$

Порахуємо дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху. Звідси

$$\{\tilde{P}_1, P_2^r\} = -\{\tilde{P}_2, P_1^r\} = \mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1, \tag{3.43}$$

$$\{\tilde{X}_1, X_2^r\} = -\{\tilde{X}_2, X_1^r\} = \mu_2\theta_2 - \mu_1\theta_1. \tag{3.44}$$

Урахувавши те, що дужки Пуассона для імпульсів центра мас та імпульсів відносного руху не дорівнюють нулеві (3.43), ми не можемо розглядати доданки $(\tilde{\mathbf{P}})^2/2M$ та $(\mathbf{P}^r)^2/2\mu + U(|\mathbf{X}^r|)$ у гамільтоніані (3.40) незалежно один від одного [43].

3.2.2 Зведення двочастинкової задачі до задачі про рух центра мас та відносний рух

Дужки Пуассона (3.43), (3.44) дорівнюють нулеві тоді, коли

$$\mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1 = 0, \tag{3.45}$$

$$\mu_2\theta_2 - \mu_1\theta_1 = 0. \tag{3.46}$$

Ці рівності виконуються, якщо

$$\theta_a m_a = \gamma = \text{const}, \tag{3.47}$$

$$\frac{\eta_a}{m_a} = \alpha = \text{const}, \tag{3.48}$$

де γ, α – деякі константи, які однакові для різних частинок. Отже, дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху системи двох частинок дорівнюють нулеві, якщо виконуються умови (3.47), (3.48). У цьому випадку

$$\left\{\frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M}, \frac{(\mathbf{P}^r)^2}{2\mu} + U(|\mathbf{X}^r|)\right\} = 0, \tag{3.49}$$

та двочаснинкова задача зводиться до двох незалежних задач про рух центра мас та відносний рух, як це є у звичному просторі. Із умов (3.47), (3.48) очевидно, що параметри некомутативності, які відповідають частинкам, залежать від їхньої маси.

Перепишемо вирази для ефективних параметрів некомутативності (3.23), (3.24), врахувавши умови (3.47), (3.48). Знайдемо:

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum_a m_a \gamma}{(\sum_b m_b)^2} = \frac{\gamma}{M}, \tag{3.50}$$

$$\tilde{\eta} = \sum_a m_a \alpha = M\alpha. \tag{3.51}$$

Із отриманих рівностей можемо зробити висновок, що умови (3.47), (3.48) можуть бути узагальнені як

$$m_a \theta_a = \tilde{\theta} M = \gamma = \text{const}, \tag{3.52}$$

$$\frac{\eta_a}{m_a} = \frac{\tilde{\eta}}{M} = \alpha = \text{const}. \tag{3.53}$$

Робимо висновок, якщо справджуються рівності (3.47), (3.48) для параметрів координатної та імпульсної некомутативностей, які відповідають частинкам, такі рівності також виконуються для ефективних параметрів некомутативності (3.52), (3.53). Якщо параметр координатної некомутативності, який відповідає частинці обернено пропорційний до її маси, ефективний параметр координатної некомутативності, який описує рух системи частинок, теж обернено пропорційний до маси системи. У випадку, коли параметри імпульсної некомутативності частинок пропорційні до їхньої маси, ефективний параметр імпульсної некомутативності пропорційний до повної маси системи [43].

3.3 Рух системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі

3.3.1 Траєкторія руху вільної частинки

Розглянемо вільну частинку з масою m у квантованому просторі, який можна описати алгеброю з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів (3.11)-(3.13). Гамільтоніан частинки має вигляд:

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m}. \tag{3.54}$$

Урахувавши дужки Пуассона (3.11)-(3.13), знайдемо рівняння руху:

$$\dot{X}_1 = \{X_1, H\} = \frac{P_1}{m}, \tag{3.55}$$

$$\dot{X}_2 = \{X_2, H\} = \frac{P_2}{m}, \tag{3.56}$$

$$\dot{P}_1 = \{P_1, H\} = \eta\frac{P_2}{m}, \tag{3.57}$$

$$\dot{P}_2 = \{P_2, H\} = -\eta\frac{P_1}{m}. \tag{3.58}$$

Розглянемо початкові умови

$$X_1(0) = X_{01}, \quad X_2(0) = X_{02}, \tag{3.59}$$

$$\dot{X}_1(0) = \upsilon_{01}, \quad \dot{X}_2(0) = \upsilon_{02}, \tag{3.60}$$

та знайдемо траєкторію, швидкість руху вільної частинки у квантованому просторі

$$X_1(t) = \upsilon_{01}\frac{m}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{02}\frac{m}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{02}\frac{m}{\eta} + X_{01}, \tag{3.61}$$

$$X_2(t) = \upsilon_{02}\frac{m}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{01}\frac{m}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{01}\frac{m}{\eta} + X_{02}, \tag{3.62}$$

$$\dot{X}_1(t) = \upsilon_{01}\cos\frac{\eta}{m}t + \upsilon_{02}\sin\frac{\eta}{m}t, \tag{3.63}$$

$$\dot{X}_2(t) = \upsilon_{02}\cos\frac{\eta}{m}t - \upsilon_{01}\sin\frac{\eta}{m}t, \tag{3.64}$$

(див. [44]). У границі $\theta \to 0, \eta \to 0$ рівняння (3.61), (3.62) матимуть такий вигляд

$$X_1(t) = \upsilon_{01}t + X_{01}, \tag{3.65}$$

$$X_2(t) = \upsilon_{02}t + X_{02}, \tag{3.66}$$

що відповідає траєкторії руху частинки у звичному просторі.

3.3.2 Проблема розлітання системи вільних частинок

Проаналізуємо рух системи N вільних частинок з масами m_1, m_2,...,m_N. Гамільтоніан системи має вигляд:

$$H = \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + \sum_a \frac{(\Delta\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a}, \tag{3.67}$$

де $M = \sum_a m_a$ – повна маса системи. Звернімо увагу, що імпульси $P_i^{(a)}$ задовольняють співвідношення (3.13). Для імпульсів центра мас та відносного руху $\tilde{P}_i$, $\Delta P_i^{(a)}$ справджуються співвідношення (3.32).

Пригадаємо, що у звичному просторі (у просторі зі звичними дужками Пуассона для координат та імпульсів, $\theta = 0$, $\eta = 0$), вільні частинки з однаковими початковими швидкостями рухаються разом. У некомутативному фазовому просторі такі частинки розлітаються, а саме: коли швидкості частинок однакові

$$\dot{X}_1^{(a)}(0) = \upsilon_{01}, \tag{3.68}$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(0) = \upsilon_{02}, \tag{3.69}$$

де $a = (1...N)$, урахувавши (3.63), (3.64), знайдемо

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) = \upsilon_{01}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t + \upsilon_{02}\sin\frac{\eta_a}{m_a}t, \tag{3.70}$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) = \upsilon_{02}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t - \upsilon_{01}\sin\frac{\eta_a}{m_a}t. \tag{3.71}$$

Звернемо увагу, що навіть у випадку однакових початкових швидкостей, для різних частинок $a \neq b$ маємо різні швидкості

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) \neq \dot{X}_1^{(b)}(t), \tag{3.72}$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) \neq \dot{X}_2^{(b)}(t). \tag{3.73}$$

Отже, система вільних частинок розлітається, що зумовлено некомутативністю імпульсів.

Ще однією особливістю руху системи вільних частинок у квантованому просторі є те, що відносний рух впливає на рух центра мас системи

$$\tilde{X}_1(t) = \sum_a \left(\upsilon_{01}\frac{m_a^2}{M\eta_a}\sin\frac{\eta_a}{m_a}t - \upsilon_{02}\frac{m_a^2}{M\eta_a}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t + \right.$$

$$\left. +\upsilon_{02}\frac{m_a^2}{M\eta_a} + \frac{m_a}{M}X_{01}^{(a)}\right), \quad (3.74)$$

$$\tilde{X}_2(t) = \sum_a \left(\upsilon_{02}\frac{m_a^2}{M\eta_a}\sin\frac{\eta_a}{m_a}t + \upsilon_{01}\frac{m_a^2}{M\eta_a}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t - \right.$$

$$\left. -\upsilon_{01}\frac{m_a^2}{M\eta_a} + \frac{m_a}{M}X_{02}^{(a)}\right), \quad (3.75)$$

$$\Delta X_1^a(t) = \upsilon_{01}\frac{m_a}{\eta_a}\sin\frac{\eta_a}{m_a}t - \upsilon_{02}\frac{m_a}{\eta_a}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t + \upsilon_{02}\frac{m_a}{\eta_a} +$$

$$+X_{01}^{(a)} - \sum_b \left(\upsilon_{01}\frac{m_b^2}{M\eta_b}\sin\frac{\eta_b}{m_b}t - \upsilon_{02}\frac{m_b^2}{M\eta_b}\cos\frac{\eta_b}{m_b}t + \right.$$

$$\left. +\upsilon_{02}\frac{m_b^2}{M\eta_b} + \frac{m_b}{M}X_{01}^{(b)}\right), \quad (3.76)$$

$$\Delta X_2^a(t) = \upsilon_{02}\frac{m_a}{\eta_a}\sin\frac{\eta_a}{m_a}t + \upsilon_{01}\frac{m_a}{\eta_a}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t - \upsilon_{01}\frac{m_a}{\eta_a} +$$

$$+X_{02}^{(a)} - \sum_b \left(\upsilon_{02}\frac{m_b^2}{M\eta_b}\sin\frac{\eta_b}{m_b}t + \upsilon_{01}\frac{m_b^2}{M\eta_b}\cos\frac{\eta_b}{m_b}t - \right.$$

$$\left. -\upsilon_{01}\frac{m_b^2}{M\eta_b} + \frac{m_b}{M}X_{02}^{(b)}\right). \quad (3.77)$$

Проаналізувавши рівняння (3.70), (3.71), (3.76), (3.77), можемо зробити висновок, що вільні частинки не рухаються разом [44]. Проте у тому разі, коли виконується умова (3.48), траєкторія вільної частинки не залежить від її маси. Із рівнянь (3.61), (3.62) знайдемо

$$X_1^{(a)}(t) = \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}\sin\alpha t - \frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\cos\alpha t + \frac{\upsilon_{02}}{\alpha} + X_{01}^{(a)}, \quad (3.78)$$

$$X_2^{(a)}(t) = \frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\sin\alpha t + \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}\cos\alpha t - \frac{\upsilon_{01}}{\alpha} + X_{02}^{(a)}, \quad (3.79)$$

$$X_{01}^{(a)} = X_1^{(a)}(0), \tag{3.80}$$

$$X_{02}^{(a)} = X_2^{(a)}(0). \tag{3.81}$$

Також при виконанні умови (3.48) частинки, що утворюють систему, та її центр мас рухаються з однаковими швидкостями

$$\dot{X}_1^{(a)}(t) = \sum_a \mu_a \dot{X}_1^{(a)}(t) = \upsilon_{01}\cos\alpha t + \upsilon_{02}\sin\alpha t, \tag{3.82}$$

$$\dot{X}_2^{(a)}(t) = \sum_a \mu_a \dot{X}_2^{(a)}(t) = \upsilon_{02}\cos\alpha t - \upsilon_{01}\sin\alpha t. \tag{3.83}$$

Із (3.76), (3.77) також знайдемо, що координати відносного руху не залежать від часу

$$\Delta X_1^{(a)} = X_{01}^{(a)} - \sum_b \mu_b X_{01}^{(b)}, \tag{3.84}$$

$$\Delta X_2^{(a)} = X_{02}^{(a)} - \sum_b \mu_b X_{02}^{(b)}. \tag{3.85}$$

Отже, коли параметр імпульсної некомутативності пропорційний масі (3.48), вільні частинки з однаковими початковими швидкостями рухаються разом, як це має бути [44].

3.4 Означення імпульсу центра мас як інтеграла руху у квантованому фазовому просторі канонічного типу

Імпульси центра мас, які означені у розділі 3.1 традиційно, як сума імпульсів частинок системи не є інтегралами руху. Щоб це показати, розглянемо, для прикладу, систему частинок, яку описують таким гамільтоніаном

$$H = \sum_a \frac{(\mathbf{P}^{(a)})^2}{2m_a} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{a,b\\ a\neq b}} U(|\mathbf{X}^{(a)} - \mathbf{X}^{(b)}|). \tag{3.86}$$

Дужки Пуассона для імпульсів центра мас з гамільтоніаном не дорівнюють нулеві. Вони мають такий вигляд:

$$\{\tilde{P}_1, H\} = \{\sum_a P_1^{(a)}, H\} = \tilde{\eta}\frac{\tilde{P}_2}{M} + \sum_a \frac{\Delta P_2^{(a)}}{m_a}\left(\eta_a - \mu_a\tilde{\eta}\right), \quad (3.87)$$

$$\{\tilde{P}_2, H\} = \{\sum_a P_2^{(a)}, H\} = -\tilde{\eta}\frac{\tilde{P}_1}{M} - \sum_a \frac{\Delta P_1^{(a)}}{m_a}\left(\eta_a - \mu_a\tilde{\eta}\right). \quad (3.88)$$

Якщо параметри імпульсної некомутативності задовольняють рівність (3.48), отриманий результат можемо переписати у дещо простішому вигляді

$$\{\tilde{P}_1, H\} = \frac{\tilde{P}_2}{M}\tilde{\eta}, \quad (3.89)$$

$$\{\tilde{P}_2, H\} = -\frac{\tilde{P}_1}{M}\tilde{\eta}, \quad (3.90)$$

проте дужки Пуассона для імпульсів центра мас та гамільтоніана не дорівнюють нулеві.

Знайдемо означення для імпульсів центра мас, які є інтегралами руху. Для цього розглянемо спочатку випадок, коли маси частинок, які формують систему однакові: $m_a = m$. Однаковими є параметри координатної та імпульсної некомутативностей $\theta_a = \theta$, $\eta_a = \eta$. Розглянемо такі величини

$$\tilde{P}_1' = \sum_a P_1^{(a)} - \eta \sum_a X_2^{(a)}, \quad (3.91)$$

$$\tilde{P}_2' = \sum_a P_2^{(a)} + \eta \sum_a X_1^{(a)}. \quad (3.92)$$

Порахуємо Дужки Пуассона для $\tilde{P}_1'$, $\tilde{P}_2'$ та гамільтоніана

$$\left\{ \sum_a (P_1^{(a)} - \eta X_2^{(a)}), \sum_b \frac{(\mathbf{P}^{(b)})^2}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{b,c \\ b\neq c}} U(|\mathbf{X}^{(b)} - \mathbf{X}^{(c)}|) \right\} = \quad (3.93)$$

$$\left\{ \sum_a (P_2^{(a)} + \eta X_1^{(a)}), \sum_b \frac{(\mathbf{P}^{(b)})^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{b,c \\ b \neq c}} U(|\mathbf{X}^{(b)} - \mathbf{X}^{(c)}|) \right\} = \\ = 0. \quad (3.94)$$

Тому величини (3.91), (3.92) є інтегралами руху [44]. Важливо, що у границі $\eta \to 0$ отримаємо

$$\tilde{P}'_1 = \sum_a P_1^{(a)}, \quad (3.95)$$

$$\tilde{P}'_2 = \sum_a P_2^{(a)}. \quad (3.96)$$

Отже, $\tilde{P}'_1$, $\tilde{P}'_2$ можливо розглядати, як імпульси центра мас у квантованому просторі.

У більш загальному випадку для системи частинок з різними масами у випадку, коли виконуються умови (3.47), (3.48), знайдемо

$$\{\tilde{P}_1 - \tilde{\eta}\tilde{X}_2, H\} = \{\tilde{P}_2 + \tilde{\eta}\tilde{X}_1, H\} = 0, \quad (3.97)$$

де $\tilde{P}_i$, $\tilde{X}_i$ – імпульси та координати центра мас системи частинок, означені традиційно (3.14), (3.15), $\tilde{\eta}$ – ефективний параметр імпульсної некомутативності (3.24). Отже, імпульси центра мас, як інтеграли руху, мають такий вигляд

$$\tilde{P}'_1 = \tilde{P}_1 - \tilde{\eta}\tilde{X}_2, \quad (3.98)$$

$$\tilde{P}'_2 = \tilde{P}_2 + \tilde{\eta}\tilde{X}_1. \quad (3.99)$$

Для $m_a = m$, $\eta_a = \eta$, $\tilde{\eta} = N\eta$ із (3.98), (3.99) знайдемо (3.91), (3.92).

Чергове завдання – знайти вирази для координат центра мас системи частинок, які спряжені до імпульсів $\tilde{P}'_1$, $\tilde{P}'_2$, тобто

$$\{\tilde{X}'_i, \tilde{P}'_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.100)$$

Переконаємося, що співвідношення (3.100) справджуються для координат, означених як

$$\tilde{X}'_i = \frac{\sum_a \mu_a X_i^{(a)}}{1-\tilde{\eta}\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{X}_i}{1-\tilde{\eta}\tilde{\theta}}. \tag{3.101}$$

Знайдемо:

$$\left\{\frac{\tilde{X}_1}{1-\tilde{\eta}\tilde{\theta}}, \tilde{P}_1 - \tilde{\eta}\tilde{X}_2\right\} = 1, \tag{3.102}$$

$$\left\{\frac{\tilde{X}_2}{1-\tilde{\eta}\tilde{\theta}}, \tilde{P}_2 + \tilde{\eta}\tilde{X}_1\right\} = 1, \tag{3.103}$$

$$\left\{\frac{\tilde{X}_1}{1-\tilde{\eta}\tilde{\theta}}, \tilde{P}_2 + \tilde{\eta}\tilde{X}_1\right\} = 0, \tag{3.104}$$

$$\left\{\frac{\tilde{X}_2}{1-\tilde{\eta}\tilde{\theta}}, \tilde{P}_1 - \tilde{\eta}\tilde{X}_2\right\} = 0. \tag{3.105}$$

Отже, координати $\tilde{X}'_i$ можемо розглядати як координати центра мас у квантованому фазовому просторі. Звернемо увагу, що дужки Пуассона для координат $\tilde{X}'_i$, та імпульсів $\tilde{P}'_i$ не дорівнюють нулю

$$\{\tilde{X}'_1, \tilde{X}'_2\} = \frac{\tilde{\theta}}{(1-\tilde{\theta}\tilde{\eta})^2}, \tag{3.106}$$

$$\{\tilde{P}'_1, \tilde{P}'_2\} = \tilde{\eta}(\tilde{\theta}\tilde{\eta} - 1). \tag{3.107}$$

Зауважимо, що дужки Пуассона для координат та імпульсів центра мас, означених як інтеграли руху, визначають за ефективними параметрами координатної та імпульсної некомутативностей.

Якщо параметри координатної та імпульсної некомутативностей залежать від мас як (3.47), (3.48), можемо означити імпульси центра мас системи частинок як інтеграли руху у квантованому фазовому просторі [44].

3.5 Задачі

1. Знайти комутаційні співвідношення для операторів координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху у шестивимірному некомутативному фазовому просторі канонічного типу

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij},$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}),$$
$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}.$$

2. Знайти енергетичні рівні системи двох частинок з осциляторною взаємодією $U = k(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})^2$ (тут k – константа, $X_i^{(1)}$, $X_i^{(1)}$ – координати частинок) з гамільтоніаном

$$H = \frac{(P^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(P^{(2)})^2}{2m_2} + k(\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)})^2$$

у двовимірному некомутативному просторі канонічного типу

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta,$$
$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar,$$
$$[X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0,$$
$$[P_1, P_2] = 0.$$

3. Знайти траєкторію руху вільної частинки у некомутативному фазовому просторі канонічного типу

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta,$$
$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar,$$
$$[X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0,$$
$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta.$$

4. Занайти інтеграли руху для вільної частинки у чотиривимірному квантованому фазовому просторі канонінчого типу (див. задачу 3). Переписати гамільтоніан вільної частинки через інтеграли руху.

5. Знайти комутаційні співвідношення для операторів координат та імпульсів центра мас, координат та імпульсів відносного руху у просторі з некомутативністю типу Лі

$$[X_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{X_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [X_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{X_k}{\tilde{\kappa}},$$

$$\begin{gathered}[P_k, X_\gamma] = i\hbar\frac{P_l}{\tilde{\kappa}}, \quad [P_l, X_\gamma] = -i\hbar\frac{P_k}{\tilde{\kappa}}, \\ [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [X_\gamma, P_\gamma] = i\hbar, \\ [X_k, X_l] = [P_m, P_n] = 0.\end{gathered}$$

Розділ 4

Фундаментальні закони та принципи у квантованому просторі

4.1 Рух у гравітаційному полі та принцип еквівалентності у некомутативному фазовому просторі

4.1.1 Рух частинки у однорідному гравітаційному полі

Модифікування звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів дає змогу описати квантований простір, однак воно водночас зумовлює низку фундаментальних проблем, зокрема порушення слабкого принципу еквівалентності. Цей принцип ще відомий як принцип рівності гравітаційної та інерційної мас. Відповідно до принципу еквівалентності траєкторія частинки в гравітаційному полі не залежить від її маси та композиції, а визначається тільки початковими координатами та швидкістю.

Розглянемо рух частинки в однорідному гравітаційному полі у двовимірному квантованому просторі з алгеброю канонічного типу. У випадку коли поле напрямлене вздовж осі X_1, гамільтоніан частинки з масою m буде мати такий вигляд

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1. \tag{4.1}$$

Урахувавши деформацію дужок Пуассона

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \tag{4.2}$$
$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}, \tag{4.3}$$
$$\{P_1, P_2\} = \eta, \tag{4.4}$$

знайдемо такі рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \left\{X_1, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1\right\} = \frac{P_1}{m}, \tag{4.5}$$
$$\dot{X}_2 = \left\{X_2, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1\right\} = \frac{P_2}{m} + mg\theta, \tag{4.6}$$
$$\dot{P}_1 = \left\{P_1, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1\right\} = mg + \eta\frac{P_2}{m}, \tag{4.7}$$
$$\dot{P}_2 = \left\{P_2, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - mgX_1\right\} = -\eta\frac{P_1}{m}. \tag{4.8}$$

Розв'язки рівнянь (4.5)–(4.8) мають вигляд

$$X_1(t) = \frac{A}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t - \frac{B}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t + C, \tag{4.9}$$
$$X_2(t) = \frac{A}{\eta}\cos\frac{\eta}{m}t + \frac{B}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t - \frac{mg}{\eta}t + mg\theta t + D, \tag{4.10}$$

де A, B, C, D – константи. Розгляньмо початкові умови

$$X_1(0) = X_{01}, \tag{4.11}$$
$$X_2(0) = X_{02}, \tag{4.12}$$
$$\dot{X}_1(0) = \upsilon_{01}, \tag{4.13}$$
$$\dot{X}_2(0) = \upsilon_{02}. \tag{4.14}$$

У цьому випадку траєкторія частинки в гравітаційному полі визначена як

$$X_1(t) = \frac{m\upsilon_{01}}{\eta}\sin\frac{\eta}{m}t + \left(\frac{m^2 g}{\eta^2} - \frac{m^2 g\theta}{\eta} + \frac{m\upsilon_{02}}{\eta}\right)(1- \\ -\cos\frac{\eta}{m}t\Big) + X_{01}, \quad (4.15)$$

$$X_2(t) = \left(\frac{m^2 g}{\eta^2} - \frac{m^2 g\theta}{\eta} + \frac{m\upsilon_{02}}{\eta}\right)\sin\frac{\eta}{m}t - \frac{m\upsilon_{01}}{\eta}(1- \\ -\cos\frac{\eta}{m}t\Big) - \frac{mg}{\eta}t + mg\theta t + X_{02}. \quad (4.16)$$

У границі $\eta \to 0$ із (4.15), (4.16) отримаємо добре відомі вирази для траєкторії частинки у звичному просторі (просторі зі звичними дужками Пуассона для координат та імпульсів)

$$X_1(t) = \frac{gt^2}{2} + \upsilon_{01}t + X_{01}, \quad (4.17)$$

$$X_2(t) = \upsilon_{02}t + X_{02}. \quad (4.18)$$

Проте важливо зауважити, що співвідношення між імпульсом та швидкістю є змінені

$$P_1 = m\dot{X}_1, \quad (4.19)$$

$$P_2 = m(\dot{X}_2 + mg\theta). \quad (4.20)$$

Із (4.15), (4.16), (4.19), (4.20) знайдемо

$$\tilde{P}_1 = m\upsilon_{01}\cos\frac{\eta}{m}t + (m\upsilon_{02} + \frac{m^2 g}{\eta} - m^2 g\theta)\sin\frac{\eta}{m}t, \quad (4.21)$$

$$\tilde{P}_2 = -m\upsilon_{01}\sin\frac{\eta}{m}t + (m\upsilon_{02} + \frac{m^2 g}{\eta} - m^2 g\theta)\cos\frac{\eta}{m}t - \frac{m^2 g}{\eta}. \quad (4.22)$$

Звернімо увагу, що імпульси частинки не пропорційні до маси (4.21), (4.22). Траєкторія частинки в однорідному гравітаційному полі залежить від її маси (4.15)–(4.16). Отже, деформація дужок Пуассона зумовлює порушення слабкого принципу еквівалентності. Проблема виникає, якщо припустити, що параметри некомутативності η та θ однакові для частинок з різними масами. Проте у загальному випадку різним частинкам можуть відповідати різні параметри координатної та імпульсної некомутативностей.

Зауважимо, що у вирази для траєкторії (4.15)–(4.16) параметри некомутативності входять тільки у вигляді таких добутків $m\theta$, η/m. Отже, при виконанні умов (3.47), (3.48), траєкторія частинки в однорідному гравітаційному полі залежить від констант γ та α, які однакові для різних частинок, а також від початкових координат та початкових швидкостей та не залежить від маси. Підставивши умови (3.47), (3.48) у рівняння (4.15)–(4.16), знайдемо

$$X_1(t) = \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}\sin\alpha t + \left(\frac{g}{\alpha^2} - \frac{g\gamma}{\alpha} + \frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\right)(1-\cos\alpha t) + X_{01}, \quad (4.23)$$

$$X_2(t) = \left(\frac{g}{\alpha^2} - \frac{g\gamma}{\alpha} + \frac{\upsilon_{02}}{\alpha}\right)\sin\alpha t - \frac{\upsilon_{01}}{\alpha}(1-\cos\alpha t) - \\ - \frac{g}{\alpha}t + \gamma g t + X_{02}. \quad (4.24)$$

Важливо також зауважити, що коли параметр координатної некомутативності обернено пропорційний до маси, відновлюється пропорційність імпульсів P_2 до маси, як це є у звичному просторі [43]

$$P_2 = m(\dot{X}_2 + \gamma g). \quad (4.25)$$

4.1.2 Рух частинки в неоднорідному гравітаційному полі

Розглянемо неоднорідне гравітаційне поле $V(X_1, X_2)$ та знайдемо рівняння руху частинки з масою m у такому полі. Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2). \quad (4.26)$$

Урахувавши деформацію дужок Пуассона (4.2)–(4.4), маємо

$$\dot{X}_1 = \left\{X_1, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2)\right\} = \\ = \frac{P_1}{m} + m\theta\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \quad (4.27)$$

$$\dot{X}_2 = \left\{ X_2, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2) \right\} = \\ = \frac{P_2}{m} - m\theta \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \tag{4.28}$$

$$\dot{P}_1 = \left\{ P_1, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2) \right\} = \\ = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \eta \frac{P_2}{m}, \tag{4.29}$$

$$\dot{P}_2 = \left\{ P_2, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + mV(X_1, X_2) \right\} = \\ = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \eta \frac{P_1}{m}. \tag{4.30}$$

Бачимо, що як і у випадку однорідного гравітаційного поля, отримані рівняння руху частинки (4.27)–(4.30) залежать від її маси. Отже, траєкторія руху частинки у неоднорідному гравітаційному полі також залежить від маси, слабкий принцип еквівалентності не виконується [43].

Розглянемо умови на параметри некомутативності (3.47), (3.48), які дають змогу відновити виконання слабкого принципу еквівалентності у разу руху частинки в однорідному гравітаційному полі. При виконанні рівностей (3.47), (3.48) рівняння руху можемо переписати у такому вигляді

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1}{m} + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \tag{4.31}$$

$$\dot{X}_2 = \frac{P_2}{m} - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \tag{4.32}$$

$$\dot{P}_1 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P_2, \tag{4.33}$$

$$\dot{P}_2 = -m \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P_1. \tag{4.34}$$

Для зручності введемо позначення

$$P_i' = \frac{P_i}{m}, \tag{4.35}$$

та перепишемо через них рівняння (4.31)–(4.34). Виконавши прості перетворення, знайдемо

$$\dot{X}_1 = P'_1 + \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}, \tag{4.36}$$

$$\dot{X}_2 = P'_2 - \gamma \frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}, \tag{4.37}$$

$$\dot{P}'_1 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1} + \alpha P'_2, \tag{4.38}$$

$$\dot{P}'_2 = -\frac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2} - \alpha P'_1. \tag{4.39}$$

Звернемо увагу, що у рівняння (4.36)–(4.39) не входить маса частинки. Тому вирази $X_i = X_i(t)$, $P'_i = P'_i(t)$ не залежать від маси. Отже, принцип еквівалентності зберігається при виконанні умов (3.47), (3.48) [43].

4.1.3 Система частинок у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі

Розглянемо систему частинок з масою M у гравітаційному полі $V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ у некомутативному фазовому просторі. Пригадаємо, що координати та імпульси центра мас системи частинок $\tilde{X}_i$, $\tilde{P}_i$ задовольняють некомутативну алгебру з ефективними параметрами некомутативності (див. підрозділ 3.1.2, (3.23), (3.24)). Також у підрозділі 3.2.2 було зазначено, що рух центра мас системи частинок та відносний рух незалежні у випадку, коли виконуються умови (3.47), (3.48). Урахувавши ці висновки, дослідімо рух системи частинок у гравітаційному полі у некомутативному фазовому просторі.

Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) + H_{rel}, \tag{4.40}$$

де H_{rel} – гамільтоніан відносного руху (H_{rel} є функцією від координат та імпульсів відносного руху). При виконанні рівностей

(3.47), (3.48), дужки Пуассона для $\tilde{\mathbf{P}}^2/2M + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ та H_{rel} дорівнюють нулеві

$$\left\{\frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2), H_{rel}\right\} = 0. \tag{4.41}$$

Отже, рівняння руху мають вигляд

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \left\{\tilde{X}_1, \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\right\} = \frac{P_1}{M} + M\tilde{\theta}\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \tag{4.42}$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \left\{\tilde{X}_1, \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\right\} = \frac{P_2}{M} - M\tilde{\theta}\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \tag{4.43}$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = \left\{\tilde{P}_1, \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\right\} = -M\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \tilde{\eta}\frac{P_2}{M}, \tag{4.44}$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = \left\{\tilde{P}_2, \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} + MV(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)\right\} = -M\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \tilde{\eta}\frac{P_1}{M}. \tag{4.45}$$

Рівняння руху залежать як від повної маси системи, так і від мас частинок, які входять до її складу, оскільки ефективні параметри некомутативності визначають як (3.23), (3.24). Тому принцип еквівалентності порушується [43].

При виконанні рівностей (3.47), (3.48) маємо

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M}, \tag{4.46}$$

$$\tilde{\eta} = M\alpha, \tag{4.47}$$

(див. (3.50), (3.51)) та рівняння руху для системи частинок у гравітаційному полі будуть мати такий вигляд

$$\dot{\tilde{X}}_1 = \frac{P_1}{M} + \gamma\frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2}, \tag{4.48}$$

$$\dot{\tilde{X}}_2 = \frac{P_2}{M} - \gamma \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1}, \tag{4.49}$$

$$\dot{\tilde{P}}_1 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_1} + \alpha P_2, \tag{4.50}$$

$$\dot{\tilde{P}}_2 = -M \frac{\partial V(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)}{\partial \tilde{X}_2} - \alpha P_1. \tag{4.51}$$

Рівняння не залежать від маси системи частинок та її композиції. Отже, рівності (3.47), (3.48) дають змогу розв'язати проблему порушення слабкого принципу еквівалентності у некомутативному фазовому просторі канонічного типу [43].

4.2 Адитивність кінетичної енергії та її незалежність від композиції у некомутативному фазовому просторі канонічного типу

Відповідно до властивості адитивності кінетична енергія системи частинок T дорівнює сумі кінетичних енергій частинок, які входять до її складу, а саме

$$T = \sum_a T_a, \tag{4.52}$$

тут T_a – кінетична енергія частинки, яка позначена індексом a. Дослідимо виконання цієї властивості у просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу. Нехай система складається з N частинок з масами m_a, ($M = \sum_a m_a$ – маса системи), яким відповідають параметри некомутативності θ_a, η_a. Частинки системи рухаються з однаковою швидкістю, яка дорівнює швидкості руху центра мас. Це збігається з випадком, коли макроскопічне тіло поділене на N частин, які розглядаються як точкові частинки. Кінетична енергія системи частинок (макроскопічного тіла) має вигляд

$$T = \frac{\tilde{P}_1^2}{2M} + \frac{\tilde{P}_2^2}{2M}, \tag{4.53}$$

де $\tilde{P}_i^{(a)}$ – імпульси центра мас, означені традиційно як сума імпульсів частинок системи.

На основі результатів (4.21), (4.22), для макроскопічного тіла в однорідному гравітаційному полі з початковими швидкостями центра мас

$$\dot{\tilde{X}}_1(0) = \tilde{\upsilon}_{01}, \tag{4.54}$$

$$\dot{\tilde{X}}_2(0) = \tilde{\upsilon}_{02}, \tag{4.55}$$

запишемо такі залежності імпульсів центра мас від часу

$$\tilde{P}_1 = M\tilde{\upsilon}_{01}\cos\frac{\tilde{\eta}}{M}t +$$
$$+(M\tilde{\upsilon}_{02} + \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} - M^2 g\tilde{\theta})\sin\frac{\tilde{\eta}}{M}t, \tag{4.56}$$

$$\tilde{P}_2 = -M\tilde{\upsilon}_{01}\sin\frac{\tilde{\eta}}{M}t +$$
$$+(M\tilde{\upsilon}_{02} + \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}} - M^2 g\tilde{\theta})\cos\frac{\tilde{\eta}}{M}t - \frac{M^2 g}{\tilde{\eta}}. \tag{4.57}$$

Отже, кінетичну енергію системи частинок можемо переписати у вигляді

$$T = \frac{M\tilde{\upsilon}_{01}^2}{2} + \frac{M\tilde{\upsilon}_{02}^2}{2} +$$
$$+g^2 M^3\left(\frac{1}{\tilde{\eta}^2} + \frac{\tilde{\theta}^2}{2} - \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\eta}}\right) + M^2 g\tilde{\upsilon}_{02}\left(\frac{1}{\tilde{\eta}} - \tilde{\theta}\right) +$$
$$+\frac{M^2 g}{\tilde{\eta}}\left(\tilde{\upsilon}_{01}\sin\frac{\tilde{\eta}}{M}t + \left(\frac{Mg}{\tilde{\eta}} - Mg\tilde{\theta} + \tilde{\upsilon}_{02}\right)\cos\frac{\tilde{\eta}}{M}t\right). \tag{4.58}$$

Запишемо вирази для імпульсів частинки з масою m_a, яка входить до складу системи

$$P_1^{(a)} = m_a\tilde{\upsilon}_{01}\cos\frac{\eta_a}{m_a}t +$$
$$+(m_a\tilde{\upsilon}_{02} + \frac{m_a^2 g}{\eta_a} - m_a^2 g\theta_a)\sin\frac{\eta_a}{m_a}t, \tag{4.59}$$

$$P_2^{(a)} = -m_a \tilde{\upsilon}_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t +$$
$$+(m_a \tilde{\upsilon}_{02} + \frac{m_a^2 g}{\eta_a} - m_a^2 g \theta_a) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t - \frac{m_a^2 g}{\eta_a}. \tag{4.60}$$

Тут ураховано те, що початкові швидкості частинки $\tilde{\upsilon}_{01}$, $\tilde{\upsilon}_{02}$. Кінетична енергія частинки з масою m_a має вигляд

$$T_a = \frac{m_a \tilde{\upsilon}_{01}^2}{2} + \frac{m_a \tilde{\upsilon}_{02}^2}{2} +$$
$$+g^2 m_a^3 \left(\frac{1}{\eta_a^2} + \frac{\theta_a^2}{2} - \frac{\theta_a}{\eta_a} \right) + m_a^2 g \tilde{\upsilon}_{02} \left(\frac{1}{\eta_a} - \theta_a \right) +$$
$$+\frac{m_a^2 g}{\eta_a} \left(\tilde{\upsilon}_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \left(\frac{m_a g}{\eta_a} - m_a g \theta_a + \tilde{\upsilon}_{02} \right) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t \right). \tag{4.61}$$

За властивістю адитивності кінетична енергія системи частинок дорівнює сумі кінетичних енергій частинок, які її формують. Отже, можемо записати

$$T = \sum_a T_a = \frac{M \tilde{\upsilon}_{01}^2}{2} + \frac{M \tilde{\upsilon}_{02}^2}{2} +$$
$$+ \sum_a \left[g^2 m_a^3 \left(\frac{1}{\eta_a^2} + \frac{\theta_a^2}{2} - \frac{\theta_a}{\eta_a} \right) + m_a^2 g \tilde{\upsilon}_{02} \left(\frac{1}{\eta_a} - \theta_a \right) + \right.$$
$$\left. +\frac{m_a^2 g}{\eta_a} \left(\tilde{\upsilon}_{01} \sin \frac{\eta_a}{m_a} t + \left(\frac{m_a g}{\eta_a} - m_a g \theta_a + \tilde{\upsilon}_{02} \right) \cos \frac{\eta_a}{m_a} t \right) \right]. \tag{4.62}$$

Отриманий результат (4.62) не тотожний (4.61). Тобто властивість адитивності кінетичної енергії порушується у некомутативному фазовому просторі канонічного типу, а тому порушується закон збереження енергії [43].

Перепишемо вирази для кінетичної енергії (4.61), (4.62), врахувавши залежності параметрів некомутативності від маси (3.47), (3.48). На основі (4.62) знайдемо

$$T = \frac{M \tilde{\upsilon}_{01}^2}{2} + \frac{M \tilde{\upsilon}_{02}^2}{2} +$$

$$+\sum_a m_a \left[g^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g\tilde{\upsilon}_{02} \left(\frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{g}{\alpha} \left(\tilde{\upsilon}_{01} \sin \alpha t + \left(\frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{\upsilon}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right]. \qquad (4.63)$$

Також, підставивши (3.47), (3.48) у (4.61), отримаємо

$$T = \frac{M\tilde{\upsilon}_{01}^2}{2} + \frac{M\tilde{\upsilon}_{02}^2}{2} +$$
$$+ M \left[g^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) + g\tilde{\upsilon}_{02} \left(\frac{1}{\alpha} - \gamma \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{g}{\alpha} \left(\tilde{\upsilon}_{01} \sin \alpha t + \left(\frac{g}{\alpha} - g\gamma + \tilde{\upsilon}_{02} \right) \cos \alpha t \right) \right]. \qquad (4.64)$$

Важливо відзначити, що вирази для кінетичної енергії (4.63), (4.64) однакові. Отже, властивість адитивності зберігається у некомутативному фазовому просторі при виконанні умов (3.47). (3.48).

Інша важлива властивість кінетичної енергії – її незалежність від композиції. Відповідно до цієї властивості кінетична енергія залежить від повної маси системи та не залежить від мас частинок, які її формують. Звернемо увагу, що відповідно до виразу (4.61) кінетична енергія залежить від ефективних параметрів координатної та імпульсної некомутативності, в означення яких входять маси частинок, що формують систему. Із (4.62) очевидно, що кінетична енергія залежить від мас частинок m_a. Проаналізувавши (4.61), (4.62), можемо зробити висновок, що некомутативність координат та некомутативність імпульсів зумовлюють залежність кінетичної енергії від композиції.

При виконанні умов (3.47), (3.48) ефективні параметри координатної некомутативності не залежать від мас частинок, які входять до її складу, не залежать від композиції системи, а залежить від повної маси системи.

$$\tilde{\theta} = \frac{\gamma}{M}, \qquad (4.65)$$
$$\tilde{\eta} = \alpha M. \qquad (4.66)$$

Вирази для кінетичної енергії (4.63), (4.64), отримані при виконанні рівностей (3.47), (3.48), залежать від констант γ, α, від повної маси системи M та не залежать від її композиції.

Отже, при виконанні рівностей (3.47), (3.48) кінетична енергія адитивна та незалежна від композиції у некомутативному фазовому просторі канонічного типу [43].

4.3 Слабкий принцип еквівалентності у деформованому просторі з довільною функцією деформації, залежною від імпульсів

4.3.1 Відновлення слабкого принципу екківалентності у одновимірному деформованому просторі

Розглянемо деформацію комутаційного співвідношення для оператора координати та імпульсу

$$[X, P] = i\hbar F(\sqrt{\beta}|P|), \tag{4.67}$$

де $F(\sqrt{\beta}|P|)$ – деяка функція деформації, β – параметр деформації. Щоб комутаційне співвідношення для координати та імпульсу мало звичний вигляд у випадку $\beta = 0$, має справджуватися рівність $F(0) = 1$. Зауважимо, що коли

$$F(\sqrt{\beta}|P|) = 1 + \beta P^2, \tag{4.68}$$

отримаємо деформовану алгебру (1.22). У класичній границі $\hbar \to 0$ із (4.67) знайдемо деформовані дужки Пуассона

$$\{X, P\} = F(\sqrt{\beta}|P|). \tag{4.69}$$

Означення для таких дужок таке

$$\{f, g\} = F(\sqrt{\beta}|P|) \left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial g}{\partial X} \right). \tag{4.70}$$

Дослідимо виконання принципу еквівалентності у просторі з деформацією (1.22). Розглянемо частинку з масою m у гравітаційному полі $V(X)$. Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{P^2}{2m} + mV(X). \tag{4.71}$$

Урахувавши деформацію дужок Пуассона (4.70), отримаємо такі рівняння руху

$$\dot{X} = \left\{X, \frac{P^2}{2m} + mV(X)\right\} = \frac{P}{m}F(\sqrt{\beta}|P|), \tag{4.72}$$

$$\dot{P} = \left\{P, \frac{P^2}{2m} + mV(X)\right\} = -m\frac{\partial V(X)}{\partial X}F(\sqrt{\beta}|P|). \tag{4.73}$$

Із (4.72), (4.73) можемо зробити висновок, що траєкторія руху частинки в гравітаційному полі залежить від її маси. Отже, слабкий принцип еквівалентності порушується в рамках алгебри (4.69). Важливо звернути увагу на те, що деформація дужок Пуассона (4.69) зумовлює значне порушення принципу еквівалентності. Щоб це показати, розглянемо рух двох частинок з масами m_1, m_2 у однорідному гравітаційному полі $V(X) = -gX$ (тут g – константа).

Знайдемо прискорення частинок $\ddot{X}^{(1)}$, $\ddot{X}^{(2)}$ з точністю до першого порядку за параметром деформації β

$$\ddot{X}^{(1)} = g + 3F'(0)g\sqrt{\beta}m_1|\upsilon| + (2F''(0) - (F'(0))^2)g\beta m_1^2\upsilon^2, \tag{4.74}$$

$$\ddot{X}^{(2)} = g + 3F'(0)g\sqrt{\beta}m_2|\upsilon| + (2F''(0) - (F'(0))^2)g\beta m_2^2\upsilon^2, \tag{4.75}$$

де υ – швидкість частинки в однорідному гравітаційному полі у звичному просторі ($\beta = 0$). Для дослідження виконання принципу еквівалентності розглянемо параметр Етвеша, який визначають як

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2(\ddot{X}^{(1)} - \ddot{X}^{(2)})}{\ddot{X}^{(1)} + \ddot{X}^{(2)}}. \tag{4.76}$$

Зауважимо, у тому разі, коли $\ddot{X}^{(1)} = \ddot{X}^{(2)}$, що випливає з принципу еквівалентності, параметр Етвеша дорівнює нулю.

З точністю до першого порядку за параметром деформації β знайдемо

$$\frac{\Delta a}{a} = 3F'(0)|\upsilon|\sqrt{\beta}(m_1 - m_2) + \\ +(2F''(0) - (F'(0))^2)\upsilon^2\beta(m_1^2 - m_2^2). \tag{4.77}$$

Щоб оцінити величину параметра Етвеша, вважатимемо, що виконується така рівність

$$\hbar\sqrt{\beta} = l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \tag{4.78}$$

де l_P – довжина Планка, c – швидкість світла, G – гравітаційна стала. Отже, вираз для параметра Етвеша матиме такий вигляд

$$\frac{\Delta a}{a} = 3F'(0)\frac{|\upsilon|}{c}\frac{(m_1 - m_2)}{m_P} +$$
$$+(2F''(0) - (F'(0))^2)\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{(m_1^2 - m_2^2)}{m_P^2}, \tag{4.79}$$

де m_P – маса Планка

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}. \tag{4.80}$$

Із (4.79) можемо зробити висновок про значний вплив деформації дужок Пуассона на параметр Етвеша [45]. За результатами експериментальних даних слабкий принцип еквівалентності виконується з великою точністю. Для прикладу, за даними експерименту з лазерної далекометрії Місяця точність виконання принципу еквівалентності

$$\frac{\Delta a}{a} = (-0.8 \pm 1.3) \cdot 10^{-13}, \tag{4.81}$$

(див. [46]). Проблему порушення принципу еквівалентності у деформованому просторі можна розв'язати, якщо припустити, що параметр деформації залежить від маси як

$$\beta = \frac{\gamma^2}{m^2}, \tag{4.82}$$

де γ – константа, яка не залежить від маси та є однаковою для різних частинок.

У випадку, коли виконується рівність (4.82), параметр Етвеша $\Delta a/a$ (4.77) дорівнює нулеві. Принцип еквівалентності зберігається.

Звернемо увагу також на те, що при виконанні рівності (4.82) рівняння (4.72), (4.73) можуть бути переписані як

$$\dot{X} = \frac{P}{m} F\left(\gamma \frac{|P|}{m}\right), \tag{4.83}$$

$$\frac{\dot{P}}{m} = -\frac{\partial V(X)}{\partial X} F\left(\gamma \frac{|P|}{m}\right). \tag{4.84}$$

Уведемо змінну

$$P' = \frac{P}{m}, \tag{4.85}$$

та запишемо рівняння (4.83), (4.84) у такому вигляді

$$\dot{X} = P' F\left(\gamma |P'|\right), \tag{4.86}$$

$$\dot{P}' = -\frac{\partial V(X)}{\partial X} F\left(\gamma |P'|\right). \tag{4.87}$$

Зауважимо, що в (4.83), (4.84) маса скоротилася. Звідси випливає, що розв'язки цих рівнянь $X(t)$, $P'(t)$ від маси не залежать. Тобто, при виконанні рівності (4.82), рух частинки в гравітаційному полі у просторі з деформованими дужками Пуассона не залежить від маси, принцип еквівалентності зберігається [45].

4.3.2 Тривимірна деформована алгебра та слабкий принцип еквівалентності

Розглянемо більш загальну алгебру

$$[X_i, X_j] = 0, \tag{4.88}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3), \tag{4.89}$$

$$[P_i, P_j] = 0, \tag{4.90}$$

де $F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3)$ – деяка функція, для якої виконуються такі рівності

$$F_{ij}(-\sqrt{\beta}P_1, -\sqrt{\beta}P_2, -\sqrt{\beta}P_3) = F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3), \tag{4.91}$$

$$F_{ij}(0, 0, 0) = \delta_{ij}, \tag{4.92}$$

(див. статтю [45]). У класичній границі зі співвідношень (4.88)–(4.90) отримуємо деформовані дужки Пуассона

$$\{X_i, X_j\} = 0, \tag{4.93}$$

$$\{X_i, P_j\} = F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3), \tag{4.94}$$

$$\{P_i, P_j\} = 0, \tag{4.95}$$

які означаються як

$$\{f, g\} = \\ = \sum_{i,j} F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3)\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial X_j}\right). \tag{4.96}$$

Розглянемо частинку з масою m у гравітаційному полі $V(\mathbf{X})$. Гамільтоніан має вигляд

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + mV(\mathbf{X}). \tag{4.97}$$

Взявши до уваги (4.93)–(4.95), знайдемо рівняння руху

$$\dot{X}_i = \left\{X_i, \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + mV(\mathbf{X})\right\} = \\ = \sum_i \frac{P_j}{m} F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3), \tag{4.98}$$

$$\dot{P}_i = \left\{P_i, \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + mV(\mathbf{X})\right\} = \\ = -m\sum_j \frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial X_j} F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3). \tag{4.99}$$

При виконанні рівності (4.82) рівняння руху можемо переписати у такому вигляді

$$\dot{X}_i = \sum_j \frac{P_j}{m} F_{ij}\left(\gamma\frac{P_1}{m}, \gamma\frac{P_2}{m}, \gamma\frac{P_3}{m}\right), \tag{4.100}$$

$$\frac{\dot{P}_i}{m} = -\sum_j \frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial X_j} F_{ij}\left(\gamma\frac{P_1}{m}, \gamma\frac{P_2}{m}, \gamma\frac{P_3}{m}\right). \tag{4.101}$$

Для зручності означимо P' як відношення імпульсу частинки до її маси

$$P'_i = \frac{P_i}{m}, \tag{4.102}$$

Отже, рівняння руху матимуть вигляд

$$\dot{X}_i = \sum_j P'_j F_{ij}\left(\gamma P'_1, \gamma P'_2, \gamma P'_3\right), \tag{4.103}$$

$$\dot{P}'_i = -\sum_j \frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial X_j} F_{ij}\left(\gamma P'_1, \gamma P'_2, \gamma P'_3\right). \tag{4.104}$$

Звернемо увагу, що у рівняння для X_i, P'_i маса не входить (4.103), (4.104). Отже, траєкторія частинки у гравітаційному полі не залежить від маси та принцип еквівалентності зберігається у деформованому просторі (4.93)–(4.95), якщо виконується рівність (4.82).

4.4 Властивості кінетичної енергії у деформованому просторі

4.4.1 Одновимірний деформований простір

Розглянемо одновимірний деформований простір (4.69) та дослідимо властивості кінетичної енергії частинки.

Знайдемо зв'язок між імпульсом та швидкістю вільної частинки у деформованому просторі (4.69). Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{P^2}{2m} \tag{4.105}$$

та отримаємо

$$\dot{X} = \{X, \frac{P^2}{2m}\} = \frac{P}{m} F(\sqrt{\beta}|P|). \tag{4.106}$$

Урахувавши (4.106), можемо переписати кінетичну енергію як

$$T = \frac{P^2}{2m} = \frac{m\dot{X}^2 F^2(\sqrt{\beta}|P|)}{2}. \tag{4.107}$$

Розклавши $F(\sqrt{\beta}|P|)$ в ряд Тейлора, з точністю до β кінетична енергія буде мати вигляд

$$T = \frac{m\dot{X}^2}{2} - F'(0)\sqrt{\beta}m^2|\dot{X}|\dot{X}^2 + \\ +(5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta m^3\dot{X}^4}{2}, \qquad (4.108)$$

де $F'(x) = dF/dx$, $F''(x) = d^2F/dx^2$.

Розглянемо систему N частинок з масами m_a, які рухаються з однаковими швидкостями, або еквівалентно макроскопічне тіло, поділене на N частин, які можемо вважати частинками. Врахувавши (4.108), запишемо з точністю до β кінетичну енергію частинки з індексом a.

$$T_a = \frac{m_a\dot{X}_a^2}{2} - F'(0)\sqrt{\beta}m_a^2|\dot{X}_a|\dot{X}_a^2 + \\ +(5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta m_a^3\dot{X}_a^4}{2}. \qquad (4.109)$$

За властивістю адитивності кінетичну енергію системи частинок визначають як

$$T = \sum_a T_a = \frac{M\dot{X}^2}{2} - \sum_a F'(0)\sqrt{\beta}m_a^2|\dot{X}_a|\dot{X}_a^2 + \\ +\sum_a(5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta m_a^3\dot{X}_a^4}{2}, \qquad (4.110)$$

де $M = \sum_a m_a$ – повна маса системи. Врахувавши те, що швидкості частинок однакові

$$\dot{X}_a = \dot{X}, \qquad (4.111)$$

кінетичну енергію системи частинок можемо переписати як

$$T = \sum_a T_a = \frac{M\dot{X}^2}{2} - F'(0)\sqrt{\beta}|\dot{X}|\dot{X}^2\sum_a m_a^2 + \\ +(5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta\dot{X}^4}{2}\sum_a m_a^3. \qquad (4.112)$$

З іншого боку для частинки (тіла) з масою M відповідно до (4.108) маємо такий вираз для кінетичної енергії

$$T = \frac{M\dot{X}^2}{2} - \\ -F'(0)\sqrt{\beta}M^2|\dot{X}|\dot{X}^2 + (5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta M^3 \dot{X}^4}{2}. \quad (4.113)$$

Важливо звернути увагу, що результати (4.112), (4.113) не збігаються, тобто кінетична енергія не є адитивною у деформованому просторі [45]. Зауважимо, що виконуються такі рівності

$$M^2 = (\sum_a m_a)^2 > \sum_a m_a^2, \quad (4.114)$$

$$M^3 = (\sum_a m_a)^3 > \sum_a m_a^3. \quad (4.115)$$

Можемо порівняти поправки до кінетичної енергії у (4.112), (4.113), зумовлені деформацією дужок Пуассона. Маємо

$$\left| -F'(0)\sqrt{\beta}M^2|\dot{X}|\dot{X}^2 + (5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta M^3 \dot{X}^4}{2} \right| > \\ \left| -F'(0)\sqrt{\beta}|\dot{X}|\dot{X}^2 \sum_a m_a^2 + (5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta \dot{X}^4}{2} \sum_a m_a^3 \right|. \quad (4.116)$$

Для системи N однакових частинок $m_a = m$, $M = Nm$ кінетична енергія (4.112), (4.113) буде мати такий вигляд

$$T = N\frac{m\dot{X}^2}{2} - \\ -N^2F'(0)\sqrt{\beta}m^2|\dot{X}|\dot{X}^2 + N^3(5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta m^3 \dot{X}^4}{2}, \quad (4.117)$$

$$T = NT_a = N\frac{m\dot{X}^2}{2} - \\ -N\left(F'(0)\sqrt{\beta}m^2|\dot{X}|\dot{X}^2 - (5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta m^3 \dot{X}^4}{2}\right). \quad (4.118)$$

Звернемо увагу, що у виразах (4.117), (4.118) присутні різні залежності кінетичної енергії системи від кількості частинок N, які входять до її складу. Із (4.117) можемо зробити висновок, що зі збільшенням кількості частинок поправки до кінетичної енергії першого та другого порядків за $\sqrt{\beta}$

$$T^{(1)} = N^2 F'(0)\sqrt{\beta} m^2 |\dot{X}|\dot{X}^2, \tag{4.119}$$

$$T^{(2)} = N^3 (5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\beta m^3 \dot{X}^4}{2}, \tag{4.120}$$

зростають як N^2 та N^3. Кінетична енергія системи при $\beta = 0$

$$T^{(0)} = N\frac{m\dot{X}^2}{2}, \tag{4.121}$$

пропорційна тільки до N. Із (4.117) очевидно, що вплив деформації дужок Пуассона (4.69) на кінетичну енергію макроскопічного тіла значний, проте такий висновок не відповідає тому, що ми отримуємо під час експериментів. Отже, існує проблема значного впливу деформації дужок Пуассона на кінетичну енергію макроскопічного тіла. Також важливо зауважити, що відповідно до виразу (4.112) кінетична енергія тіла залежить від мас частинок, які його формують. Для двох тіл з однаковими масами та різними композиціями ми отримаємо різні кінетичні енергії.

Властивості кінетичної енергії зберігаються, а також розв'язується проблема значних поправок, зумовлених деформацією, до кінетичної енергії макроскопінчого тіла, якщо розглянути випадок, коли параметри деформації, які відповідають різним частинкам залежать від маси

$$\sqrt{\beta_a} m_a = \gamma = \mathrm{const}, \tag{4.122}$$

(див. також (4.82)). У цьому випадку для тіла з масою M, яке може бути поділене на N частин, які можемо розглядати як точкові частинки з масами m_a та параметрами деформації β_a, є змога переписати (4.112) як

$$T = \sum_a T_a = \frac{M\dot{X}^2}{2} -$$
$$-F'(0)\gamma M|\dot{X}|\dot{X}^2 + (5(F'(0))^2 - F''(0))\frac{\gamma^2 M\dot{X}^4}{2}. \tag{4.123}$$

Вираз (4.123) тотожний (4.108), якщо параметр деформації β макроскопічного тіла (системи частинок) залежить від маси тіла M так само як параметри деформації частинок (4.122), а саме: коли виконується рівність

$$\sqrt{\beta}M = \gamma. \tag{4.124}$$

Отже, якщо параметри деформації, які відповідають частинкам чи макроскопічному тілу обернено пропорційні до квадрату маси частинок (тіла) (4.82), кінетична енергія є адитивна та незалежна від композиції.

Зауважимо, що такий висновок можемо зробити у всіх порядках за параметром деформації. Якщо ж виконується рівність (4.82), імпульс P пропорційний до маси, а саме: ми можемо переписати вираз (4.106) як

$$\dot{X} = \frac{P}{m} F\left(\gamma \frac{|P|}{m}\right). \tag{4.125}$$

Із (4.125) випливає, що P/m є функцією швидкості $\dot{X}$, константи γ

$$\frac{P}{m} = f(\dot{X}, \gamma). \tag{4.126}$$

Отже, імпульс P пропорційний до маси m, як це є у звичному просторі (просторі з $\beta = 0$). Врахувавши (4.126), кінетична енергія може бути записана в такому вигляді

$$T = \frac{P^2}{2m} = \frac{m(f(\dot{X}, \gamma))^2}{2}. \tag{4.127}$$

За властивістю адитивності кінетичне енергію системи N частинок з масами m_a, які рухаються з однаковою швидкістю, визначають як

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a(f(\dot{X}, \gamma))^2}{2} = \frac{M(f(\dot{X}, \gamma))^2}{2}, \tag{4.128}$$

де $M = \sum_a m_a$. Звернемо увагу, що вираз (4.128) відповідає (4.127) з $M = \sum_a m_a$. Також зауважимо, що кінетична енергія (4.128) пропорційна до повної маси системи M та не залежить від її композиції. Отже, при виконанні рівності (4.82) властивості кінетичної енергії зберігаються у просторі з деформованими дужками Пуассона для координати та імпульсу (4.69). Цей висновок можемо узагальнити на випадок тривимірного деформованого простору [45].

4.4.2 Тривимірний деформований простір

Розглянемо гамільтоніан вільної частинки з масою m

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m}. \tag{4.129}$$

Урахувавши деформацію дужок Пуассона (4.93)–(4.95), знайдемо такий зв'язок між швидкостями та імпульсами

$$\dot{X}_i = \sum_j \frac{P_j}{m} F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3). \tag{4.130}$$

Якщо ж коли виконується рівність (4.82), отримане рівняння можемо переписати як

$$\dot{X}_i = \sum_j \frac{P_j}{m} F_{ij}\left(\gamma\frac{P_1}{m}, \gamma\frac{P_2}{m}, \gamma\frac{P_3}{m}\right). \tag{4.131}$$

Із (4.131) знайдемо, що відношення імпульсів до маси частинки P_i/m є функціями швидкостей та константи γ

$$\frac{P_i}{m} = f_i(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \gamma) \tag{4.132}$$

та не залежать від маси частинки m. Отже, кінетична енергія частинки з масою m може бути переписана у такому вигляді

$$T = \sum_i \frac{m(f_i(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \gamma))^2}{2}. \tag{4.133}$$

Для системи частинок (макроскопічного тіла), яка складається з N частинок з масами m_a, маємо

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \sum_i \frac{m_a (f_i(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \gamma))^2}{2} =$$
$$= \sum_i \frac{M (f_i(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \gamma))^2}{2}, \qquad (4.134)$$

тут ми врахували те, що частинки рухаються з однаковими швидкостями, а також те, що $M = \sum_a m_a$. З іншого боку, із (4.133) очевидно, що кінетична енергія тіла з масою M має такий вигляд

$$T = \sum_i \frac{M (f_i(\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \gamma))^2}{2}. \qquad (4.135)$$

Проаналізувавши (4.134) та (4.135), можемо зробити висновок, що кінетична енергія адитивна та не залежить від композиції, якщо виконується рівність (4.82) [45].

4.5 Перетворення Галілея у деформованому просторі з мінімальною довжиною

Розглянемо частинку (макроскопічне тіло, яке ми розглядаємо як точкову частинку) з масою m у полі $U(X)$ у квантованому просторі (1.22). У класичній границі із (1.22) отримаємо такі деформовані дужки Пуассона

$$\{X, P\} = (1 + \beta P^2). \qquad (4.136)$$

Запишемо гамільтоніан

$$H = \frac{P^2}{2m} + U(X), \qquad (4.137)$$

тут X, P задовольняють деформовані дужки Пуассона (4.136). Використаємо квазікоординатне зображення для координат та імпульсів (1.35), (1.36) та перепишемо гамільтоніан частинки у такому вигляді

$$H = \frac{\tan^2(\sqrt{\beta} p)}{2m\beta} + U(x). \qquad (4.138)$$

Звернемо увагу, що x, p задовольняють звичні дужки Пуассона, які мають вигляд

$$\{x, p\} = 1. \tag{4.139}$$

Як бачимо, у зображенні (1.35), (1.36) деформація дужок Пуассона для координати та імпульсу (4.136) еквівалентна до деформації кінетичної енергії. Запишемо гамільтоніан з точністю до першого порядку за параметром деформації β

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{3}\frac{\beta}{m}p^4 + U(x). \tag{4.140}$$

Зауважимо, що отриманий вираз дуже подібний гамільтоніану релятивістської частинки, записаного з точністю до першого порядку за $1/c^2$

$$\begin{aligned} H_r = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} + U(x) = \\ = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8m^3c^2}p^4 + U(x). \end{aligned} \tag{4.141}$$

Для зручності введемо ефективну швидкість, яку визначають як

$$u^2 = \frac{3}{8\beta m^2}. \tag{4.142}$$

Вираз (4.140) може бути отриманий з такого гамільтоніана

$$H = -mu^2\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2u^2}} + mu^2 + U(x), \tag{4.143}$$

записаного у першому порядку за β, чи в першому порядку за $1/u^2$. Отже, можемо зробити висновок, що поправки до всіх властивостей, зумовлені деформацією, будуть подібними до релятивістських поправок у першому порядку за $1/c^2$, проте з протилежним знаком перед $1/c^2$. Зокрема, це означає, що перетворення Галілея у першому порядку за параметром β будуть подібними до перетворень Лоренца, проте з додатнім знаком перед $1/c^2$. Щоб це показати, запишемо лагранжіан

$$L = \dot{x}p - H(x, p). \tag{4.144}$$

Знайдемо імпульс p як функцією від x, $\dot{x}$. Для цього запишемо рівняння

$$\dot{x} = \{x, H\} = \frac{p}{m} + \frac{4}{3}\frac{\beta}{m}p^3, \tag{4.145}$$

з якого з точністю до першого порядку за β знайдемо

$$p = m\dot{x}\left(1 - \frac{4}{3}\beta m^2 \dot{x}^2\right). \tag{4.146}$$

Підставивши (4.144) у лагранжіан з точністю до першого порядку за β маємо

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{3}\beta m^3 \dot{x}^4 - U(x). \tag{4.147}$$

Подібно до гамільтоніана (4.140) отриманий лагранжіан подібний до лагранжіану релятивістської частинки, записаного з точністю до $1/c^2$

$$L_r = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - U(x) =$$
$$= -mc^2 + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{8c^2}\dot{x}^4 - U(x). \tag{4.148}$$

Відмінність є тільки в константі mc^2, а також в протилежному знаку перед останнім доданком. Отже, можемо переписати лагранжіан (4.147) у такому вигляді

$$L = mu^2\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{u^2}} - mu^2 - U(x), \tag{4.149}$$

де ефективну швидкість u визначають як (4.142). Доданок $-mu^2$, який є константою, не впливає на рівняння руху та може бути опущений.

Щоб знайти перетворення Галілея у деформованому просторі розглянемо випадок, коли $U = 0$. У цьому разі лагранжіан матиме вигляд

$$L = mu^2\sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{u^2}} - mu^2. \tag{4.150}$$

З точністю до першого порядку за параметром деформації функція дії буде мати такий вигляд

$$S = mu^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \frac{\dot{x}^2}{u^2}} dt =$$

$$= mu^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dt^2 + \frac{dx^2}{u^2}} mu \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{u^2 (dt)^2 + (dx)^2}, \qquad (4.151)$$

тут використано позначення

$$ds^2 = u^2 (dt)^2 + (dx)^2. \qquad (4.152)$$

Зауважимо, що інтервал (4.152) є інваріантним відносно поворотів на площині (ut, x). Отже, можемо записати такі перетворення

$$x = x' \cos\phi + ut' \sin\phi, \qquad (4.153)$$

$$ut = -x' \sin\phi + ut' \cos\phi, \qquad (4.154)$$

тут кут ϕ пов'язаний зі швидкістю руху точки $x' = 0$ відносно нерухомої системи координат

$$V = \frac{x}{t}. \qquad (4.155)$$

Підставивши у (4.153), (4.154) $x' = 0$, маємо

$$\frac{x}{ut} = \frac{V}{u} = \tan\phi. \qquad (4.156)$$

Здійснимо алгебраїчні перетворення

$$\frac{V^2}{u^2} = \tan^2\phi, \qquad (4.157)$$

$$\frac{V^2}{u^2} = \frac{1}{\cos^2\phi} - 1, \qquad (4.158)$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2/u^2}}, \qquad (4.159)$$

$$\sin\phi = \frac{V/u}{\sqrt{1 + V^2/u^2}}. \qquad (4.160)$$

Підставивши отримані вирази для $\cos\phi$, $\sin\phi$ у (4.153), (4.154), знайдемо перетворення Галілея у деформованому просторі

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 + V^2/u^2}}, \tag{4.161}$$

$$t = \frac{t' - x'V/u^2}{\sqrt{1 + V^2/u^2}}. \tag{4.162}$$

Будемо називати ці перетворення *деформованими перетвореннями Галілея.* Звернемо увагу, що вони дуже подібні до перетворень Лоренца з від'ємним знаком перед $1/u^2$ [22].

Пригадаємо, що результат (4.161) отримано з точністю до першого порядку за параметром деформації, тобто у цьому наближенні маємо такі перетворення

$$x = (x' + Vt')\left(1 - \frac{V^2}{2u^2}\right), \tag{4.163}$$

$$t = t'\left(1 - \frac{V^2}{2u^2}\right) - x'\frac{V}{u^2}. \tag{4.164}$$

У границі $\beta \to 0$, чи у границі $u \to \infty$ (див. (4.142)) з виразів (4.163), (4.164) отримаємо звичні перетворення Галілея

$$x = x' + Vt', \tag{4.165}$$

$$t = t'. \tag{4.166}$$

Звернемо увагу, що перетворення Галілея у деформованому просторі (4.163), (4.164) залежать від ефективної швидкості u, яка залежить від маси (див. (4.142)). Отже, для частинок з різними масами маємо різні перетворення Галілея. Цю проблему можна розв'язати, якщо припустити, що для параметра деформації виконується рівність (4.82). Маємо

$$u^2 = \frac{3}{8\gamma^2}. \tag{4.167}$$

Отже, при виконанні (4.82) ефективна швидкість не залежить від маси частинки (тіла), та перетворення Галілея є однаковими для частинок різних мас [22].

4.6 Оцінення верхньої межі для мінімальної довжини на основі зміщення перигелію Меркурія та проблема макроскопічного тіла

4.6.1 Зміщення перигелію орбіти частинки у деформованому просторі

Розглянемо деформовану алгебру

$$[X_i, X_j] = 0, \tag{4.168}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + 2\beta P_i P_j, \tag{4.169}$$
$$[P_i, P_j] = 0. \tag{4.170}$$

Такі комутаційні співвідношення отримаємо тоді, коли функція деформації у (4.88)–(4.90) має вигляд

$$F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3) = \delta_{ij}(1 + \beta P^2) + 2\beta P_i P_j. \tag{4.171}$$

У класичній границі отримаємо деформовані дужки Пуассона

$$\{X_i, X_j\} = 0, \tag{4.172}$$
$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}(1 + \beta P^2) + 2\beta P_i P_j . \{P_i, P_j\} = 0. \tag{4.173}$$

Такі дужки означаються як

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \times$$
$$\times \left(\delta_{ij}(1 + \beta P^2) + 2\beta P_i P_j\right). \tag{4.174}$$

Обчислимо зміщення перигелію орбіти частинки у такому просторі (4.172), (4.173) [47]. Розглянемо гамільтоніан

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{mk}{\sqrt{\sum_i X_i^2}}, \tag{4.175}$$

$k = \mathrm{const}$. Перейдемо до координат та імпульсів x_i, p_i, які задовольняють звичні дужки Пуассона. З точністю до першого порядку за β запишемо таке зображення для координат та імпульсів, які задовольняють співвідношення деформованої алгебри

$$X_i = x_i, \tag{4.176}$$

$$P_i = p_i(1+\beta p^2). \tag{4.177}$$

Отже, гамільтоніан частинки у гравітаційному полі можна переписати у такому вигляді

$$H = (1+\beta p^2)^2 \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} = \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} + \frac{\beta}{m} p^4, \tag{4.178}$$

тут

$$x = \sqrt{\sum_i x_i^2}. \tag{4.179}$$

У (4.178) наявний додатковий доданок $\beta p^4/m$, що пов'язано деформацією дужок Пуассона для координат та імпульсів. Цей доданок зумовлює зміщення перигелію. Знайдемо його. Для цього зручно розглянути вектор Гамільтона [47], означення для якого є таким

$$\mathbf{u} = -\frac{mk[[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]\times\mathbf{x}]}{x[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]^2} = -\frac{mk[\mathbf{L}\times\mathbf{x}]}{xL^2}, \tag{4.180}$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{x}\times\mathbf{p}]. \tag{4.181}$$

Зміщення перигелію розрахуємо як

$$\Delta\phi_p = \int_0^T \Omega dt, \tag{4.182}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{[\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{u}}]}{u^2}. \tag{4.183}$$

Зауважимо, що у просторі зі звичними дужками Пуассона для координат та імпульсів справджується рівність

$$\dot{\mathbf{u}} = \left\{\mathbf{u}, \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x}\right\} = $$

$$= \left\{-\frac{mk[\mathbf{L}\times\mathbf{x}]}{xL^2}, \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x}\right\} = 0. \tag{4.184}$$

Тобто вектор Гамільтона зберігається. У просторі з деформованими дужками Пуассона (4.172), (4.173), оскільки гамільтоніан (4.178) містить доданок $\beta p^4/m$, маємо

$$\dot{\mathbf{u}} \neq 0. \tag{4.185}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \left\{\mathbf{u}, \frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} + \frac{\beta}{m}p^4\right\} = \\ &= \left\{\mathbf{u}, \frac{\beta}{m}p^4\right\} = \frac{4\beta k p^2}{x^3}\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{4.186}$$

Урахувавши те, що модуль вектора Гамільтона має вигляд

$$u = \frac{mke}{L}, \tag{4.187}$$

де e – ексцентриситет орбіти частинки, та, використавши отриманий результат для $\dot{\mathbf{u}}$, знайдемо

$$\Omega = \frac{[\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}]}{u^2} = \frac{4\beta p^2 L}{m x^3 e^2}\left(x - \frac{L^2}{m^2 k}\right). \tag{4.188}$$

Порахуємо зміщення перигелію. Для цього перепишемо (4.182) у такому вигляді

$$\Delta\phi_p = \int_0^{2\pi} \frac{\Omega}{\dot{\phi}} d\phi. \tag{4.189}$$

У звичному просторі ($\beta = 0$) для частинки в гравітаційному полі виконуються такі рівності

$$L = m x^2 \dot{\phi}, \tag{4.190}$$

$$x = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\phi}, \tag{4.191}$$

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{mk}{x} = -\frac{mk}{2a}, \tag{4.192}$$

$$a(1-e^2) = \frac{L^2}{m^2 k}, \tag{4.193}$$

де a – велика піввісь, ϕ – полярний кут. Використаємо їх для розрахунку зміщення перигелію з точністю до першого порядку за параметром β. Знайдемо

$$\Delta\phi_p = \int_0^{2\pi} \frac{4\beta p^2 L}{\dot{\phi} m x^3 e^2}\left(x - \frac{L^2}{m^2 k}\right) d\phi =$$
$$-\frac{4\beta m^2 k}{ea(1-e^2)}\int_0^{2\pi}(\cos\phi + e^2\cos\phi + 2e\cos^2\phi)d\phi =$$
$$= -\frac{8\pi\beta m^2 k}{a(1-e^2)}, \qquad (4.194)$$

(див. [47]).

4.6.2 Верхня межа для мінімальної довжини та проблема футбольного м'яча

Розглянемо зміщення перигелію Меркурія. Підставимо у (4.194) параметри орбіти Меркурія, його масу $m = M$ та $k = GM_\odot$, $M_\odot$ – маса Сонця, G – гравітаційна константа. Також урахуємо, що макроскопічні тіла описують параметрами деформації, $\tilde{\beta}$, які менші ніж параметри деформації, що відповідають елементарним частинкам (див підрозділи 4.2). Отже, можемо записати такий вираз для зміщення перигелію Меркурія у квантованому просторі

$$\Delta\phi_p = -\frac{8\pi\tilde{\beta} G M^2 M_S}{a(1-e^2)}. \qquad (4.195)$$

Зміщення перигелію Меркурія, яке пов'язане із релятивістськими ефектами має вигляд

$$\Delta\phi_{obs} = 42,9779 \pm 0,0009 \text{ arc-seconds per century} =$$
$$= 2\pi(7,98695 \pm 0,00017)\cdot 10^{-8}\text{radians/revolution}, \qquad (4.196)$$

(див. табл. 3 у ст. [48]). З загальної теорії відносності відомо

$$\Delta\phi_{GR} = 3\pi\left(\frac{2GM_S}{c^2 a(1-e^2)}\right) = 2\pi(7.98744\cdot 10^{-8})\text{rad/rev}, \qquad (4.197)$$

де c – швидкість світла (див., для прикл., [49]). Припустивши, що зміщення перигелію, пов'язане з деформацією дужок Пуассона, є меншим ніж $|\Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR}|$

$$|\Delta\phi_{nc}| \leq |\Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR}|, \tag{4.198}$$

в межах 3σ отримаємо

$$\Delta\phi_{obs} - \Delta\phi_{GR} =$$
$$= 2\pi(-0.00049 \pm 0.00017) \cdot 10^{-8}\text{rad/rev}, \tag{4.199}$$
$$|\Delta\phi_p| \leq 2\pi \cdot 10^{-11}\text{rad/rev}. \tag{4.200}$$

Оцінимо параметри деформації, які відповідають елементарним частинкам. Використавши зв'язок цих параметрів з масою (4.122), (4.124), можемо записати такі рівності

$$\sqrt{\tilde{\beta}}M = \gamma, \tag{4.201}$$
$$\sqrt{\beta_{nuc}}m_{nuc} = \gamma, \tag{4.202}$$
$$\sqrt{\beta_e}m_e = \gamma, \tag{4.203}$$

де β_{nuc}, β_e – параметри деформації, які відповідають нуклонам та електронам, m_{nuc}, m_e – маси нуклона та електрона. Із (4.201), (4.203) знайдемо

$$\tilde{\beta} = \frac{m_{nuc}^2}{M^2}\beta_{nuc} = \frac{m_e^2}{M^2}\beta_e. \tag{4.204}$$

Отже, із (4.204) та (4.195), (4.200) маємо

$$-\frac{8\pi\tilde{\beta}GM^2M_S}{a(1-e^2)} = -\frac{8\pi m_{nuc}^2\beta_{nuc}GM_S}{a(1-e^2)}, \tag{4.205}$$
$$-\frac{8\pi m_{nuc}^2\beta_{nuc}GM_S}{a(1-e^2)} \leq 2\pi \cdot 10^{-11}\text{rad/rev}, \tag{4.206}$$
$$\hbar\sqrt{\beta_{nuc}} < 2 \cdot 10^{-18}\text{м}. \tag{4.207}$$

Аналогічно для мінімальної довжини, яка відповідає електронам, обчислимо

$$\hbar\sqrt{\beta_e} < 3.7 \cdot 10^{-15}\text{м}. \tag{4.208}$$

Цей результат накладає слабші обмеження на мінімальну довжину у порівняно з тими, які були отримані на основі дослідження атома водню у деформованому просторі (див. [15, 50, 51]). Це пов'язано з тим, що вплив квантованості простору на рух макроскопічних тіл є меншим ніж на елементарні частинки. Тому для строгих оцінок потрібні високоточні експериментальні дані.

Зауважимо, якщо не враховувати те, що параметр деформації, який відповідає макроскопічному тілу, є меншим ніж параметри деформації, які відповідають елементарним частинкам (4.122), (4.124), якщо підставити

$$\hbar\sqrt{\beta} = 10^{-35}\text{м} \tag{4.209}$$

у вираз (4.194), то знайдемо колосальне зміщення перигелію

$$\Delta\phi_p = -\frac{8\pi\beta G M^2 M_S}{a(1-e^2)} = 2\pi \cdot 10^{55}\text{rad/rev.} \tag{4.210}$$

Із (4.210) очевидно, що мінімальна довжина має значний плив на зміщення перигелію Меркурія, який мали б спостерігати на експериментах, проте ми цього не бачимо. Або, навпаки, якщо порівняти вираз (4.194) з (4.199), не врахувавши (4.122), (4.124), отримаємо мінімальну довжину, яка на багато порядків менша ніж довжина Планка. Для прикладу, у статті [49] було знайдено мінімальну довжину 10^{-68}м у деформованому просторі (1.43)–(1.45). Цей результат на 33 порядки менший за планківську довжину та, як зазначили автори статті, потребує пояснень.

Подібні екстремально малі результати для мінімальної довжини були отримані на основі досліджень зміщення перигелію Меркурія у квантованих просторах, які описуються алгеброю Кемпфа [49], алгеброю Снайдера [52,53]. Автори статей [49,52,53] прийшли до висновку, що наявна проблема опису макроскопічних тіл у квантованому просторі. Її, як і аналогічну їй у подвійній спеціальній теорії відносності (Double Special Relativity), називають *проблемою футбольного м'яча* (soccer-ball problem) [54–58])

Проблема опису руху макроскопічного тіла можна розв'язати у деформованому просторі, якщо врахувати (4.122), (4.124). Результати для мінімальної довжини (4.207), (4.208), отримані з використанням умов (4.122), (4.124), є більші ніж планківська довжина. Тому проблема надзвичайно малих оцінок для мінімальної довжини, отриманих на основі досліджень зміщення перигелію Меркурія, не виникає. Завершуючи, зауважимо, що зв'язок параметра деформації з масою також дає змогу розв'язати проблему футбольного м'яча у просторах з нерелятивістською алгеброю Снайдера [59], алгеброю Кемпфа [60]. Як було показано у цьому розділі, зв'язок параметрів деформованих алгебр (параметрів деформації, параметрів некомутативності) з масою є важливим також для розв'язання проблеми порушення принципу еквівалентності, виконання властивостей кінетичної енергії та відновлення закону збереження енергії.

4.7 Задачі

1. Знайти траєкторію частинки в однорідному гравітаційному полі у некомутативному просторі канонічного типу

$$\{X_1, X_2\} = \theta,$$
$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij},$$
$$\{P_1, P_2\} = 0,$$

(тут $i, j = (1, 2)$) та дослідити виконання слабкого принципу еквівалентності.

2. Знайти траєкторію частинки в однорідному гравітаційному полі у тривимірному квантованому просторі, який характеризується такими дужками Пуассона

$$\{X_i, X_j\} = \{P_i, P_j\} = 0,$$
$$\{X_i, P_j\} = \sqrt{1 + \beta P^2}(\delta_{ij} + \beta P_i P_j),$$

(тут $i, j = (1, 2, 3)$) та дослідити виконання слабкого принципу еквівалентності.

3. Записати означення для деформованих дужок Пуассона, які відповідають нерелятивістській алгебрі Снайдера
$$\{X_i, X_j\} = \beta^2(P_j X_i - P_i X_j),$$
$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij} + \beta^2 P_i P_j,$$
$$\{P_i, P_j\} = 0,$$
а саме $\{f, g\} = ?$

4. Перевірити виконання властивостей кінетичної енергії у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера (див. задачу 2).

5. Оцінити параметр Етвеша у деформованому просторі
$$\{X, P\} = F(\sqrt{\beta}|P|),$$
для $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 0,1$ кг, $\upsilon = 1$ м/с.

6. Знайти рівняння руху частинки у гравітаційному полі у просторі з деформованими дужками Пуассона
$$\{X_i, X_j\} = G(P^2)(X_i P_j - X_j P_i),$$
$$\{X_i, P_j\} = f(P^2)\delta_{ij} + F(P^2) P_i P_j,$$
$$\{P_i, P_j\} = 0,$$
де $G(P^2)$, $F(P^2)$, $f(P^2)$ – деякі функції. Дослідити виконання принципу еквівалентності у випадках
а) руху в однорідному гравітаційному полі;
б) руху в неоднорідному гравітаційному полі.

7. Дослідити адитивність кінетичної енергії у деформованому просторі (4.88)–(4.90) у випадках, коли
а) $F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3) = \sqrt{1 + \beta P^2}(\delta_{ij} + \beta P_i P_j)$
б) $F_{ij}(\sqrt{\beta}P_1, \sqrt{\beta}P_2, \sqrt{\beta}P_3) = \delta_{ij} - \sqrt{\beta}(P\delta_{ij} + P_i P_j / P) + \beta(P^2\delta_{ij} + 3P_i P_j)$.

8. Отримати зміщення перигелію Меркурія у просторі з нерелятивістською алгеброю Снайдера та знайти оцінку для мінімальної довжини.

9. Знайти перетворення Галілея у тривимірному деформованому просторі

$$[X_i, X_j] = 0,$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\sqrt{1+\beta P^2}\left(\delta_{i,j} + \beta P_i P_j\right),$$
$$[P_i, P_j] = 0.$$

10. Знайти рівніння руху частинки в гравітаційному полі у просторі з некомутативною алгеброю Лі типу

$$[X_i, X_j] = \frac{i\hbar t}{\kappa}\left(\delta_{i\rho}\delta_{j\tau} - \delta_{i\tau}\delta_{j\rho}\right), \tag{4.211}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{4.212}$$
$$[P_i, P_j] = 0, \tag{4.213}$$

$(i, j = (1, 2, 3)$, ρ, τ – деякі фіксовані індекси, причому $\rho \neq \tau$, κ – параметр). Та проаналізувати виконання принципу еквівалентності.

Розділ 5

Симетрія відносно інверсії часу у квантованому просторі

5.1 Перетворення відносно інверсії часу у класичній та квантовій механіці

При перетворенні інверсії часу напрямок його плину змінюється на протилежний $t \to -t$. При такому перетворенні координати, швидкість та прискорення змінюються як

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}, \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \to \frac{d\mathbf{x}}{-dt} = -\mathbf{v}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \to \frac{d\mathbf{x}}{(-dt)^2} = \mathbf{a}. \tag{5.3}$$

Незмінність фізичних законів та властивостей фізичних систем при $t \to -t$ називають *інваріантністю відносно інверсії часу.* Для прикладу, другий закон Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ є інваріантним відносно інверсії часу тоді, коли сили, які діють на тіло, залежать тільки від його положення. Тоді при перетворенні інверсії часу $\mathbf{F} \to \mathbf{F}$ та рівність $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ залишається незмінною. Зауважимо, що у квантовій механіці перетворення інверсії часу включає також комплексне спряження (див., для прикладу, [61]). Рівняння Шредінгера

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = H\psi(\mathbf{r},t), \tag{5.4}$$

не є інваріантним щодо зміни $t \to -t$. Маємо:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},-t)}{\partial(-t)} = H\psi(\mathbf{r},-t). \tag{5.5}$$

Форма рівняння Шредінгера відновлюється, якщо ми візьмемо комплексне спряження з лівої та правої його частин. У випадку, коли H дійсний $H^* = H$, знайдемо:

$$\left(i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},-t)}{\partial(-t)}\right)^* = \left(H\psi(\mathbf{r},-t)\right)^*, \tag{5.6}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},-t)}{\partial t} = H\psi^*(\mathbf{r},-t). \tag{5.7}$$

Отже, $\psi^*(\mathbf{r},-t)$ задовольняє те саме рівняння, що і $\psi(\mathbf{r},t)$ (див., для прикладу, [61]). Введемо оператор інверсії часу T, такий що

$$T\psi(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},-t) = \tilde{\psi}(\mathbf{r},t). \tag{5.8}$$

Він складається з заміни t на $-t$ та операції комплексного спряження. Розглянемо як перетворюються оператори при інверсії часу. Нехай після дії оператора A на функцію $\psi(\mathbf{r},t)$ отримаємо $\phi(\mathbf{r},t)$

$$A\psi(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t). \tag{5.9}$$

Після інверсії часу знайдемо

$$T\psi(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},-t) = \tilde{\psi}(\mathbf{r},t), \tag{5.10}$$

$$T\phi(\mathbf{r},t) = \phi^*(\mathbf{r},-t) = \tilde{\phi}(\mathbf{r},t). \tag{5.11}$$

Звідки отримаємо:

$$\psi(\mathbf{r},t) = T^{-1}\tilde{\psi}(\mathbf{r},t), \tag{5.12}$$

$$\phi(\mathbf{r},t) = T^{-1}\tilde{\phi}(\mathbf{r},t) \tag{5.13}$$

Тут T^{-1} – обернений оператор до T. Підставивши вирази для функцій у (5.9), можемо записати:

$$AT^{-1}\tilde{\psi}(\mathbf{r},t) = T^{-1}\tilde{\phi}(\mathbf{r},t). \tag{5.14}$$

Подіявши на ліву і праву частину рівності оператором T, знайдемо

$$TAT^{-1}\tilde{\psi}(\mathbf{r},t) = TT^{-1}\tilde{\phi}(\mathbf{r},t) = \tilde{\phi}(\mathbf{r},t). \tag{5.15}$$

Звідки маємо, що оператор A після інверсії часу перетворюється як

$$\tilde{A} = TAT^{-1}. \tag{5.16}$$

Для операторів координат та імпульсів знайдемо

$$\tilde{x}_i = Tx_iT^{-1} = x_i, \tag{5.17}$$
$$\tilde{p}_i = Tp_iT^{-1} = -p_i. \tag{5.18}$$

Розглянемо звичні комутаційні співвідношення для операторів координат та імпульсів

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{5.19}$$
$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{5.20}$$
$$[p_i, p_j] = 0. \tag{5.21}$$

При перетворенні інверсії часу $x_i \to x_i$ та $p_i \to -p_i$. Урахувавши, що це перетворення включає також комплексне спряження, знайдемо:

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{5.22}$$
$$[x_i, -p_j] = -i\hbar\delta_{ij}, \tag{5.23}$$
$$[-p_i, -p_j] = 0. \tag{5.24}$$

Як бачимо, отримані співвідношення відповідають (5.19), (5.21).

5.2 Алгебра з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів канонічного типу та перетворення інверсії часу

Розглянемо некомутативну алгебру канонічного типу

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{5.25}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \tag{5.26}$$

$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{5.27}$$

(тут $i, j = (1, 2, 3)$, θ_{ij}, η_{ij}, σ_{ij} – константи, див. підрозд. 1.4.3) відносно інверсії часу. Припустимо, що перетворення при інверсії часу для некомутативних координат та некомутативних імпульсів є такі, як у звичному просторі

$$X_i \to X_i, \tag{5.28}$$

$$P_i \to -P_i. \tag{5.29}$$

Після інверсії часу можемо записати такі комутаційні співвідношення:

$$[X_i, X_j] = -i\hbar\theta_{ij}, \tag{5.30}$$

$$[X_i, -P_j] = -i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \tag{5.31}$$

$$[-P_i, -P_j] = -i\hbar\eta_{ij}, \tag{5.32}$$

(тут ми врахували, що в квантовій механіці перетворення інверсії часу включає комплексне спряження). З (5.30)–(5.32) знайдемо:

$$[X_i, X_j] = -i\hbar\theta_{ij}, \tag{5.33}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}), \tag{5.34}$$

$$[P_i, P_j] = -i\hbar\eta_{ij}. \tag{5.35}$$

Зауважимо, що отримані комутаційні співвідношення (5.33)–(5.35) суперечать співвідношенням алгебри (5.25)–(5.27). Така невідповідність виникає через те, що ми припустили, що координати та імпульси у некомутативному просторі при інверсії часу трансформуються як і в звичному просторі (5.28), (5.29) і водночас ми вважаємо, що θ_{ij}, η_{ij} є константами. Пізніше ми покажемо, що можна зберегти перетворення (5.28), (5.29), але разом з тим θ_{ij}, η_{ij} мають бути операторами.

5.2.1 Залежність перетворень для некомутативних координат та імпульсів при інверсії часу від зображення

Перетворення координат та імпульсів у некомутативному просторі залежать від зображення. Покажемо це у двовимірному випадку

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{5.36}$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1+\gamma), \tag{5.37}$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta. \tag{5.38}$$

Координати та імпульси, які задовольняють таку некомутативну алгебру можуть бути представлені як

$$X_1 = \varepsilon\left(x_1 - \theta_1' p_2\right), \tag{5.39}$$

$$X_2 = \varepsilon\left(x_2 + \theta_2' p_1\right), \tag{5.40}$$

$$P_1 = \varepsilon\left(p_1 + \eta_1' x_2\right), \tag{5.41}$$

$$P_2 = \varepsilon\left(p_2 - \eta_2' x_1\right), \tag{5.42}$$

де ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2' – константи. Оператори x_i, p_i задовольняють звичні комутаційні співвідношення:

$$[x_i, x_j] = 0, \tag{5.43}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{5.44}$$

$$[p_i, p_j] = 0. \tag{5.45}$$

При перетворенні інверсії часу, розглядаючи звичні трансформації для x_i, p_i

$$x_i \to x_i, \quad p_i \to -p_i, \tag{5.46}$$

знайдемо:

$$X_1 \to X_1' = \varepsilon\left(x_1 + \theta_1' p_2\right), \tag{5.47}$$

$$X_2 \to X_2' = \varepsilon\left(x_2 - \theta_2' p_1\right), \tag{5.48}$$

$$P_1 \to -P_1' = \varepsilon\left(-p_1 + \eta_1' x_2\right), \tag{5.49}$$

$$P_2 \to -P_2' = \varepsilon\left(-p_2 - \eta_2' x_1\right). \tag{5.50}$$

Перетворення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів (5.47)–(5.50) залежать від параметрів ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2'. Тому, використовуючи різні зображення, отримаємо різні перетворення [62].

Параметри ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2' можуть бути вибрані по-різному, а саме: врахувавши співвідношення (5.43)–(5.45), та вирази для координат та імпульсів (5.39)–(5.42) знайдемо:

$$[X_1, X_2] = \left[\varepsilon\left(x_1 - \theta_1' p_2\right), \varepsilon\left(x_2 + \theta_2' p_1\right)\right] \tag{5.51}$$

$$=$$

$$= i\hbar\varepsilon^2(\theta_1' + \theta_2'), \tag{5.52}$$

$$[X_1, P_1] = \left[\varepsilon\left(x_1 - \theta_1' p_2\right), \varepsilon\left(p_1 + \eta_1' x_2\right)\right] = \\ = i\hbar\varepsilon^2(1 + \theta_1'\eta_1') \tag{5.53}$$

$$[X_2, P_2] = \left[\varepsilon\left(x_2 + \theta_2' p_1\right), \varepsilon\left(p_2 - \eta_2' x_1\right)\right] = \\ = i\hbar\varepsilon^2(1 + \theta_2'\eta_2'), \tag{5.54}$$

$$[P_1, P_2] = \left[\varepsilon\left(p_1 + \eta_1' x_2\right), \varepsilon\left(p_2 - \eta_2' x_1\right)\right] = \\ = i\hbar\varepsilon^2(\eta_1' + \eta_2'). \tag{5.55}$$

Порівнявши (5.52)–(5.55) та (5.36)–(5.38), можемо записати такі рівності:

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \theta_1'\eta_1' = \theta_2'\eta_2' = \gamma, \tag{5.56}$$

$$\theta_1' + \theta_2' = \theta, \tag{5.57}$$

$$\eta_1' + \eta_2' = \eta, \tag{5.58}$$

Знайшовши константи θ_1', θ_2', η_2', η_2', отримаємо:

$$\theta_1' = \frac{1}{2}\left(\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\gamma}{\eta}}\right), \tag{5.59}$$

$$\theta_2' = \frac{1}{2}\left(\theta \mp \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\gamma}{\eta}}\right), \tag{5.60}$$

$$\eta_1' = \frac{1}{2}\left(\eta \mp \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\gamma}{\theta}}\right), \tag{5.61}$$

$$\eta_2' = \frac{1}{2}\left(\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\gamma}{\theta}}\right), \tag{5.62}$$

$$\gamma \leq \frac{\theta\eta}{4}. \tag{5.63}$$

Отже, зображення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів має вигляд:

$$X_1 = x_1 - \frac{1}{2}\left(\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\gamma}{\eta}}\right)p_2, \tag{5.64}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1}{2}\left(\theta \mp \sqrt{\theta^2 - 4\frac{\theta\gamma}{\eta}}\right)p_1, \tag{5.65}$$

$$P_1 = p_1 + \frac{1}{2}\left(\eta \mp \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\gamma}{\theta}}\right)x_2, \tag{5.66}$$

$$P_2 = p_2 - \frac{1}{2}\left(\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\frac{\eta\gamma}{\theta}}\right)x_1, \tag{5.67}$$

Вибравши знаки у (5.64)–(5.67), отримаємо два різні зображення. Отже, маємо два різні перетворення при інверсії часу (5.47)–(5.50).

У випадку, коли параметри ε, θ_1', θ_2', η_2', η_2' вибрані у такому вигляді:

$$\varepsilon = 1, \quad \theta_1' = \theta_2' = \frac{\theta}{2}, \tag{5.68}$$

$$\eta_1' = \eta_2' = \frac{\eta}{2}, \tag{5.69}$$

отримаємо добре відоме у літературі симетричне зображення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів

$$X_1 = x_1 - \frac{\theta}{2}p_2, \tag{5.70}$$

$$X_2 = x_2 + \frac{\theta}{2}p_1, \tag{5.71}$$

$$P_1 = p_1 + \frac{\eta}{2}x_2, \tag{5.72}$$

$$P_2 = p_2 - \frac{\eta}{2}x_1. \tag{5.73}$$

Координати та імпульси, зображені як (5.70), (5.73), задовольняють алгебру (5.36)–(5.38) з параметром

$$\gamma = \frac{\theta\eta}{4}. \tag{5.74}$$

Якщо повернутися до загального випадку і покласти у (5.36)–(5.38) $\gamma = 0$, із (5.37) отримаємо звичні комутаційні співвідношення для координат та імпульсів

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar. \tag{5.75}$$

Порівнявши (5.52)–(5.55) та (5.36)–(5.38) та врахувавши, що $\gamma = 0$, знайдемо:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{1 + \theta_1'\eta_1'}, \tag{5.76}$$

$$\theta_1'\eta_1' = \theta_2'\eta_2', \tag{5.77}$$

$$\varepsilon^2(\theta_1' + \theta_2') = \theta, \tag{5.78}$$

$$\varepsilon^2(\eta_1' + \eta_2') = \eta. \tag{5.79}$$

Звернемо увагу, що ми записали чотири рівняння (5.76)–(5.79), а невідомих параметрів є п'ять: ε, θ_1', θ_2', η_1', η_2'. Отже, вибравши один із них ε, θ_1', θ_2', η_1', η_2', ми отримаємо різні зображення для координат та імпульсів, для яких виконуються

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{5.80}$$

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar, \tag{5.81}$$

$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta. \tag{5.82}$$

Тому відповідно до (5.47)–(5.50) знайдемо різні перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу. Для прикладу, ми можемо покласти $\theta_2' = 0$. У результаті з (5.76)–(5.79) отримаємо такі рівності

$$\varepsilon = 1, \quad \eta_1' = 0, \tag{5.83}$$

$$\eta_2' = \eta, \quad \theta_1' = \theta. \tag{5.84}$$

Отже, зображення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів, які задовольняють співвідношення (5.80)–(5.82), має вигляд

$$X_1 = x_1 - \theta p_2, \tag{5.85}$$

$$X_2 = x_2, \tag{5.86}$$

$$P_1 = p_1, \tag{5.87}$$

$$P_2 = p_2 - \eta x_1. \tag{5.88}$$

У цьому випадку при перетворенні інверсії часу координата та імпульс X_2, P_1 змінюються, як у звичному просторі

$$X_2 \to X_2, \tag{5.89}$$

$$P_1 \to -P_1. \tag{5.90}$$

Однак для операторів X_1, P_1 маємо:

$$X_1 \to X_1' = x_1 + \theta p_2, \tag{5.91}$$

$$P_2 \to -P_2' = -p_2 - \eta x_1. \tag{5.92}$$

Вибравши параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\theta'\eta'}}, \tag{5.93}$$

знайдемо

$$\theta_1' = \theta_2' = \frac{1 \pm \sqrt{1-\theta\eta}}{\eta}, \tag{5.94}$$

$$\eta_1' = \eta_2' = \frac{1 \pm \sqrt{1-\theta\eta}}{\theta}, \tag{5.95}$$

та отримаємо два симетричні зображення:

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\theta'\eta'}}\left(x_1 - \frac{1 \pm \sqrt{1-\theta\eta}}{\eta} p_2\right), \tag{5.96}$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\theta'\eta'}}\left(x_2 + \frac{1 \pm \sqrt{1-\theta\eta}}{\eta} p_1\right), \tag{5.97}$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\theta'\eta'}}\left(p_1 + \frac{1 \pm \sqrt{1-\theta\eta}}{\theta} x_2\right), \tag{5.98}$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\theta'\eta'}}\left(p_2 - \frac{1 \pm \sqrt{1-\theta\eta}}{\theta} x_1\right), \tag{5.99}$$

(див. [63, 64]), а тому два різні перетворення для координат та імпульсів при інверсії часу [62].

5.3 Період руху по колу у некомутавному фазовому просторі канонічного типу

Дослідимо вплив некомутативності координат та некомутативності імпульсів на період руху по колу. З цією метою розглянемо чотиривимірний некомутативний фазовий простір (двовимірний координатний та двовимірний імпульсний) з такими комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів

$$[X_1, X_2] = i\hbar\theta, \tag{5.100}$$
$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = i\hbar(1+\gamma), \tag{5.101}$$
$$[P_1, P_2] = i\hbar\eta, \tag{5.102}$$

де θ, η, γ – константи. У класичній границі $\hbar \to 0$ з (5.100)–(5.102) отримаємо такі дужки Пуассона:

$$\{X_1, X_2\} = \theta, \tag{5.103}$$
$$\{X_1, P_1\} = \{X_2, P_2\} = 1+\gamma, \tag{5.104}$$
$$\{P_1, P_2\} = \eta. \tag{5.105}$$

Дослідимо гамільтоніан

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, \tag{5.106}$$

де координати та імпульси X_i, P_i задовольняють (5.103)–(5.105). Знайдемо рівняння руху

$$\dot{X}_1 = \left\{X_1, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}\right\} = \\ = \frac{P_1}{m}(1+\gamma) + \frac{k\theta X_2}{X^3}, \tag{5.107}$$

$$\dot{X}_2 = \left\{ X_2, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right\} = \\ = \frac{P_2}{m}(1+\gamma) - \frac{k\theta X_1}{X^3}, \tag{5.108}$$

$$\dot{P}_1 = \left\{ P_1, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right\} = \\ = \frac{\eta P_2}{m} - \frac{kX_1}{X^3}(1+\gamma), \tag{5.109}$$

$$\dot{P}_2 = \left\{ P_2, \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right\} = \\ = -\frac{\eta P_1}{m} - \frac{kX_2}{X^3}(1+\gamma). \tag{5.110}$$

Нас цікавлять розв'язки цих рівнянь, які описують рух по колу. Вони мають вигляд:

$$X_1(t) = R_0 \cos(\omega t), \tag{5.111}$$

$$X_2(t) = R_0 \sin(\omega t), \tag{5.112}$$

$$P_1(t) = -P_0 \sin(\omega t), \tag{5.113}$$

$$P_2(t) = P_0 \cos(\omega t), \tag{5.114}$$

де R_0 – радіус кола, P_0 – імпульс, ω – частота обертання. Підставивши вирази для $X_i(t)$, $P_i(t)$ (5.111)–(5.114) у (5.107)–(5.110), можемо записати такі рівняння

$$R_0\omega = \frac{P_0}{m} - k\theta R_0^2, \tag{5.115}$$

$$P_0\omega = -\frac{\eta P_0}{m} + kR_0^2. \tag{5.116}$$

З них знайдемо імпульс та частоту руху по колу

$$P_0 = \frac{m\omega R_0^3 + km\theta}{R_0^2(1+\gamma)} \tag{5.117}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\gamma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3} \right). \tag{5.118}$$

Згадавши, що період руху по колу визначають як $T = 2\pi/\omega$, отримаємо:

$$T = 4\pi \left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\gamma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} - \frac{\eta}{m} - \frac{k\theta}{R_0^3} \right)^{-1} \tag{5.119}$$

Розглянемо рух по колу того самого радіуса R_0, проте в зворотному напрямку. У цьому випадку розв'язки рівнянь руху можемо отримати із (5.111)–(5.114), зробивши заміну $t \to -t$

$$X_1(t) = R_0 \cos(-\omega t) = R_0 \cos(\omega t), \tag{5.120}$$

$$X_2(t) = R_0 \sin(-\omega t) = -R_0 \sin(\omega t), \tag{5.121}$$

$$P_1(t) = -P_0' \sin(-\omega t) = P_0' \sin(\omega t), \tag{5.122}$$

$$P_2(t) = P_0' \cos(-\omega t) = P_0' \cos(\omega t). \tag{5.123}$$

Тут ми ввели позначення P_0' для імпульсу руху по колу у зворотному напрямку. Підставивши (5.120)–(5.123) у рівняння руху (5.107)–(5.110), знайдемо такі рівності

$$R_0\omega = \frac{P_0}{m} + k\theta R_0^2, \tag{5.124}$$

$$P_0\omega = \frac{\eta P_0}{m} + kR_0^2. \tag{5.125}$$

Розв'язки отриманих рівнянь мають вигляд:

$$P_0' = -\frac{m\omega' R_0^3 - km\theta}{R_0^2(1+\gamma)}, \tag{5.126}$$

$$\omega' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\gamma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3} \right). \tag{5.127}$$

Період руху по колу у зворотньому напрямку визначається як

$$T' = 4\pi \left(\sqrt{\frac{4k}{mR_0^3}\left((1+\gamma)^2 - \theta\eta\right) + \left(\frac{k\theta}{R_0^3} + \frac{\eta}{m}\right)^2} + \frac{\eta}{m} + \frac{k\theta}{R_0^3} \right)^{-1} \tag{5.128}$$

Зауважимо, що частота і період руху по колу радіуса R_0 (5.127), (5.128) не відповідають частоті і періоду руху по колу радіуса R_0 у зворотному напрямку (5.118), (5.119). Отже, період руху по колу у некомутативному фазовому просторі канонічного типу залежить від напрямку руху. Вирази (5.119), (5.128) відрізняються знаками біля параметрів координатної та імпульсної некомутативностей.

5.4 Збереження симетрії відносно інверсії часу у квантованому фазовому просторі

На початку розділу показано, що, розглянувши перетворення для координат та імпульсів у некомутативному просторі, такі як у звичному просторі (5.28), (5.29), ми отримаємо співвідношення (5.33)–(5.35), які суперечать алгебрі (5.25)–(5.27). Для усунення цієї неузгодженості θ_{ij} та η_{ij} мають перетворюватися як

$$\theta_{ij} \to -\theta_{ij}, \tag{5.129}$$

$$\eta_{ij} \to -\eta_{ij}. \tag{5.130}$$

Щоб були справедливими перетворення (5.129), (5.130) побудуємо тензори некомутативності за допомогою додаткових імпульсів p^a_k, p^b_k. Найпростіший вигляд для θ_{ij}, η_{ij}, при якому виконується (5.129), (5.130), є таким:

$$\theta_{ij} = \frac{c_\theta}{\hbar}\sum_k \varepsilon_{ijk} p^a_k, \tag{5.131}$$

$$\eta_{ij} = \frac{c_\eta}{\hbar}\sum_k \varepsilon_{ijk} p^b_k. \tag{5.132}$$

Тут c_θ, c_η – константи.

Зауважимо, що некомутативна алгебра канонічного типу (5.25)–(5.27) не є інваріантна відносно поворотів. Сферична симетрія не зберігається у некомутативному фазовому просторі канонічного типу. Тому для збереження також сферичної симетрії розглянемо випадок, коли додаткові імпульси p^a_i, p^b_i та додаткові координати

a_i, b_i відповідають гармонічним осциляторам з такими гамільтоніанами:

$$H^a_{osc} = \frac{(\mathbf{p}^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2_{osc}\mathbf{a}^2}{2}, \tag{5.133}$$

$$H^b_{osc} = \frac{(\mathbf{p}^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2_{osc}\mathbf{b}^2}{2}. \tag{5.134}$$

Оскільки параметри некомутативності визначають величину мінімальної довжини у некомутативному просторі, яка є порядку планківської, припустимо, що довжина осциляторів має вигляд

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m_{osc}\omega_{osc}}} = l_P. \tag{5.135}$$

Частота осциляторів ω_{osc} дуже велика. У цьому разі відстані між енергетичними рівнями осциляторів $\hbar\omega_{osc}$ є також дуже великі. Тому для переходу осциляторів на збуджені рівні потрібно багато енергії. Як наслідок, осцилятори, які знаходяться в основних станах, в них залишатимуться [65–67].

Для додаткових координат та додаткових імпульсів виконуються звичні комутаційні співвідношення:

$$[a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, b_j] = 0, \tag{5.136}$$

$$[p^a_i, p^a_j] = [p^b_i, p^b_j] = [p^a_i, p^b_j] = 0, \tag{5.137}$$

$$[a_i, p^a_j] = [b_i, p^b_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{5.138}$$

$$[a_i, p^b_j] = [b_i, p^a_j] = 0. \tag{5.139}$$

Також розглядають випадок, коли додаткові імпульси комутують з некомутативними координатами та некомутативними імпульсами X_i, P_i

$$[p^a_i, X_j] = [p^a_i, P_j] = 0, \tag{5.140}$$

$$[p^b_i, X_j] = [p^b_i, P_j] = 0. \tag{5.141}$$

Виконання таких комутаційних співвідношень є важливим для того, щоб побудувати некомутативну алгебру, еквівалентну до некомутативної алгебри канонічного типу, а саме: щоб для побудованих тензорів некомутативностей справджувалися такі самі комутаційні співвідношення, як і для параметрів некомутативності:

$$[X_i, \theta_{jk}] = [P_i, \theta_{jk}] = 0, \tag{5.142}$$

$$[X_i, \eta_{jk}] = [P_i, \eta_{jk}] = 0. \tag{5.143}$$

Отже, взявши до уваги (5.131), (5.132), можемо записати некомутативну алгебру

$$[X_i, X_j] = ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a, \tag{5.144}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2} (\mathbf{p}^a \cdot \mathbf{p}^b) \delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b \right), \tag{5.145}$$

$$[P_i, P_j] = ic_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^b. \tag{5.146}$$

Тут враховано таку рівність:

$$\gamma_{ij} = \sum_k \frac{\theta_{ik}\eta_{jk}}{4} = \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2} (\mathbf{p}^a \cdot \mathbf{p}^b) \delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2} p_j^a p_i^b. \tag{5.147}$$

Некомутативні координати та некомутативні імпульси можуть бути зображені як

$$X_i = x_i + \frac{c_\theta}{2\hbar} [\mathbf{p}^a \times \mathbf{p}]_i, \tag{5.148}$$

$$P_i = p_i - \frac{c_\eta}{2\hbar} [\mathbf{x} \times \mathbf{p}^b]_i, \tag{5.149}$$

де координати та імпульси x_i, p_i задовольняють звичні співвідношення:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{5.150}$$

Алгебра (5.144)–(5.146) є інваріантна відносно поворотів

$$[X_i', X_j'] = ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^{a\prime}, \tag{5.151}$$

$$[X_i', P_j'] =$$

$$= i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar} (\mathbf{p}^{a\prime} \cdot \mathbf{p}^{b\prime}) \delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar} p_j^{a\prime} p_i^{b\prime} \right), \tag{5.152}$$

$$[P_i', P_j'] = ic_\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^{b\prime}. \tag{5.153}$$

Тут X_i', P_i', $p_i^{a\prime}$, $p_i^{b\prime}$ координати та імпульси після повороту, які мають такий вигляд

$$X_i' = U(\varphi)X_iU^+(\varphi), \quad P_i' = U(\varphi)P_iU^+(\varphi), \tag{5.154}$$

$$p_i^{a\prime} = U(\varphi)p_i^aU^+(\varphi), \quad p_i^{b\prime} = U(\varphi)p_i^bU^+(\varphi). \tag{5.155}$$

Оператор повороту визначають як

$$U(\varphi) = \exp(i\varphi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L^t})/\hbar), \tag{5.156}$$

$$\mathbf{L^t} = [\mathbf{x}\times\mathbf{p}] + [\mathbf{a}\times\mathbf{p}^a] + [\mathbf{b}\times\mathbf{p}^b]. \tag{5.157}$$

Розглянувши звичні перетворення для операторів координат та імпульсів при інверсії часу

$$X_i \to X_i, \quad P_i \to -P_i, \tag{5.158}$$

$$p_i^a \to -p_i^a, \quad p_i^b \to -p_i^b, \tag{5.159}$$

знайдемо:

$$[X_i, X_j] = -ic_\theta\sum_k \varepsilon_{ijk}(-p_k^a), \tag{5.160}$$

$$[X_i, -P_j] = = -i\hbar\left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2}((-\mathbf{p}^a)\cdot(-\mathbf{p}^b))\delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4\hbar^2}(-p_j^a)(-p_i^b)\right), \tag{5.161}$$

$$[-P_i, -P_j] = -ic_\eta\sum_k \varepsilon_{ijk}(-p_k^b). \tag{5.162}$$

Після спрощень із (5.160)–(5.162) отримаємо (5.144)–(5.146).

Зауважимо також, що на основі виразів (5.148), (5.149) маємо:

$$X_i \to x_i + \frac{c_\theta}{2\hbar}[-\mathbf{p}^a\times(-\mathbf{p})]_i = X_i, \tag{5.163}$$

$$P_i \to -p_i - \frac{c_\eta}{2\hbar}[\mathbf{x}\times(-\mathbf{p}^b)]_i = -P_i. \tag{5.164}$$

Отже, алгебра (5.144)–(5.146) є сферично-симетрична, еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу та дає змогу зберегти симетрію відносно інверсії часу [62].

На завершення підрозділу зауважимо, що, оскільки для побудови тензорів координатної та імпульсної некомутативностей були введені додаткові імпульси, при дослідженні фізичної системи з гамільтоніаном H_s у інваріантному щодо інверсії часу, сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі канонічного типу (5.144)–(5.146) потрібно розглядати повний гамільтоніан:

$$H = H_s + H^a_{osc} + H^b_{osc} = H_s + \frac{(\mathbf{p}^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2_{osc}\mathbf{a}^2}{2} + \\ + \frac{(\mathbf{p}^b)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega^2_{osc}\mathbf{b}^2}{2}. \quad (5.165)$$

5.5 Енергія частинки в однорідному полі у інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі

Розглянемо частинку з масою m у однорідному полі у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі канонічного типу

$$[X_i, X_j] = ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p^a_k, \quad (5.166)$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.167)$$

$$[P_i, P_j] = 0. \quad (5.168)$$

Алгебра (5.166)–(5.168) відповідає (5.144)–(5.146) з $c_\eta = 0$.

Гамільтоніан частинки має вигляд:

$$H_p = \frac{P^2}{2m} - \alpha X_3. \quad (5.169)$$

Координати та імпульси задовольняють співвідношення (5.166)–(5.168). У (5.169) ми розглянули випадок, коли поле напрямлене вздовж осі X_3, константа α характеризує силу, яка діє на частинку. Зауважимо, що оскільки алгебра (5.166)–(5.168) є сферично-симетрична, результати, які будуть описані у цьому підрозділі, можливо легко узагальнити на випадок довільного напрямку поля.

Оскільки тензори координатної некомутативності побудовані за допомогою додаткових імпульсів, які відповідають гармонічному осцилятору, для частинки в однорідному полі у сферичносиметричному, інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі розгляньмо такий повний гамільтоніан:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \alpha X_3 + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a^2}{2}. \tag{5.170}$$

Знайдемо енергію частинки в однорідному полі. Для цього, використавши зображення для некомутативних координат та некомутативних імпульсів через координати та імпульси x_i, p_i, які задовольняють звичні співвідношення

$$X_i = x_i + \frac{c_\theta}{2\hbar}[\mathbf{p}^a \times \mathbf{p}]_i, \tag{5.171}$$

$$P_i = p_i, \tag{5.172}$$

перепишемо гамільтоніан (5.170) у такому вигляді:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha x_3 - \frac{\alpha c_\theta}{2\hbar}(p_1^a p_2 - p_2^a p_1) + \\ + \frac{(p^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a^2}{2}. \tag{5.173}$$

Урахувавши рівності

$$\frac{(p_1^a)^2}{2m_{osc}} - \frac{\alpha c_\theta}{2\hbar}p_1^a p_2 = \\ = \frac{1}{2m_{osc}}\left(p_1^a - \frac{\alpha c_\theta m_{osc}}{2\hbar}p_2\right)^2 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m_{osc}}{8\hbar^2}p_1^2, \tag{5.174}$$

$$\frac{(p_2^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{\alpha c_\theta}{2\hbar}p_2^a p_1 = \\ = \frac{1}{2m_{osc}}\left(p_2^a + \frac{\alpha c_\theta m_{osc}}{2\hbar}p_1\right)^2 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m_{osc}}{8\hbar^2}p_2^2, \tag{5.175}$$

перепишемо гамільтоніан (5.173) у такому вигляді:

$$H = \left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m m_{osc}}{4\hbar^2}\right)\frac{p_1^2}{2m} + \left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m m_{osc}}{4\hbar^2}\right)\frac{p_2^2}{2m} + \\ + \frac{p_3^2}{2m} - \alpha x_3 + \frac{1}{2m_{osc}}\left(p_1^a - \frac{\alpha c_\theta m_{osc}}{2\hbar}p_2\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2m_{osc}}\left(p_2^a+\frac{\alpha c_\theta m_{osc}}{2\hbar}p_1\right)^2+$$
$$+\frac{(p_3^a)^2}{2m_{osc}}+\frac{m_{osc}\omega_{osc}^2a_1^2}{2}+\frac{m_{osc}\omega_{osc}^2a_2^2}{2}+\frac{m_{osc}\omega_{osc}^2a_3^2}{2}. \quad (5.176)$$

Зауважимо, що оператори

$$\tilde{H}_p=\left(1-\frac{\alpha^2c_\theta^2mm_{osc}}{4\hbar^2}\right)\frac{p_1^2}{2m}+\left(1-\frac{\alpha^2c_\theta^2mm_{osc}}{4\hbar^2}\right)\frac{p_2^2}{2m}+$$
$$+\frac{p_3^2}{2m}-\alpha x_3, \quad (5.177)$$

та

$$\tilde{H}_{osc}=\frac{1}{2m_{osc}}\left(p_1^a-\frac{\alpha c_\theta}{2\omega_{osc}l_P^2}p_2\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2m_{osc}}\left(p_2^a+\frac{\alpha c_\theta}{2\omega_{osc}l_P^2}p_1\right)^2+\frac{(p_3^a)^2}{2m_{osc}}+\frac{m_{osc}\omega_{osc}^2a_1^2}{2}+$$
$$+\frac{m_{osc}\omega_{osc}^2a_2^2}{2}+\frac{m_{osc}\omega_{osc}^2a_3^2}{2}, \quad (5.178)$$

комутують

$$[\tilde{H}_p,\tilde{H}_{osc}]=0. \quad (5.179)$$

Гамільтоніан $\tilde{H}_p$ перепишемо як

$$\tilde{H}_p=\tilde{H}_1+\tilde{H}_2+\tilde{H}_3, \quad (5.180)$$

де ми використали такі позначення:

$$\tilde{H}_1=\frac{p_1^2}{2m_{eff}}, \quad (5.181)$$
$$\tilde{H}_2=\frac{p_2^2}{2m_{eff}}, \quad (5.182)$$
$$\tilde{H}_3=\frac{p_3^2}{2m}-\alpha x_3, \quad (5.183)$$
$$[\tilde{H}_1,\tilde{H}_2]=[\tilde{H}_2,\tilde{H}_3]=[\tilde{H}_1,\tilde{H}_3]=0. \quad (5.184)$$

Тут ми використали позначення m_{eff} для ефективної маси, яку визначають як

$$m_{eff} = m\left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m m_{osc}}{4\hbar^2}\right)^{-1} = m\left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m}{4\hbar\omega_{osc} l_P^2}\right)^{-1}. \quad (5.185)$$

Щоб записати (5.185), використано рівність

$$\sqrt{\frac{\hbar}{m_{osc}\omega_{osc}}} = l_P. \quad (5.186)$$

Доданки $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{H}_3$ комутують між собою

$$[\tilde{H}_1, \tilde{H}_2] = [\tilde{H}_2, \tilde{H}_3] = [\tilde{H}_1, \tilde{H}_3] = 0. \quad (5.187)$$

Оператори $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ відповідають гамільтоніанам вільної частинки з масою m_{eff}. Отже, власні значення $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ мають вигляд:

$$\tilde{E}_1 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m_{eff}} = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}\left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m}{4\hbar\omega_{osc} l_P^2}\right), \quad (5.188)$$

$$\tilde{E}_2 = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_{eff}} = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}\left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m}{4\hbar\omega_{osc} l_P^2}\right), \quad (5.189)$$

тут k_1, k_2 – хвильові числа.

Зауважимо, що оператори x_3, p_3 у $\tilde{H}_3$ задовольняють звичне комутаційне співвідношення $[x_3, p_3] = i\hbar$. Отже, $\tilde{H}_3$ відповідає гамільтоніану частинки в однорідному полі у звичному просторі. Ввівши такі позначення

$$\tilde{p}_1^a = p_1^a - \frac{\alpha c_\theta}{2\omega_{osc} l_P^2} p_2, \quad (5.190)$$

$$\tilde{p}_2^a = p_2^a + \frac{\alpha c_\theta}{2\omega_{osc} l_P^2} p_1, \quad (5.191)$$

$$\tilde{p}_3^a = p_3^a, \quad (5.192)$$

перепишемо (5.178) як

$$\tilde{H}_{osc} = \frac{(\tilde{p}^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a^2}{2}. \quad (5.193)$$

Для a_i, $\tilde{p}^a_i$ виконуються звичні комутаційні співвідношення, а саме маємо:

$$[a_i, a_j] = 0, \tag{5.194}$$

$$[a_i, \tilde{p}^a_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{5.195}$$

$$[\tilde{p}^a_i, \tilde{p}^a_j] = 0. \tag{5.196}$$

Отже, оператор (5.193) відповідає гамільтоніану тривимірного гармонічного осцилятора з масою m_{osc} та частотою ω_{osc} у звичному просторі. Енергетичні рівні осцилятора

$$\tilde{E}_{n_1,n_2,n_3} = \hbar\omega_{osc}\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right), \tag{5.197}$$

де n_1, n_2, n_3 – квантові числа, $n_i = 0, 1, 2....$ Згадаємо з попереднього підрозділу, що частота осцилятора велика, тому гармонічний осцилятор, який знаходиться в основному стані, залишатиметься у ньому. Енергія основного стану:

$$\tilde{E}_{0,0,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega_{osc}. \tag{5.198}$$

Підсумувавши всі результати, запишемо енергію частинки у однорідному полі у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі

$$E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}\left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m}{4\hbar\omega_{osc} l_P^2}\right) + \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}\left(1 - \frac{\alpha^2 c_\theta^2 m}{4\hbar\omega_{osc} l_P^2}\right) + \\ + E_3 + \frac{3}{2}\hbar\omega_{osc}. \tag{5.199}$$

Звернемо увагу, що рух у напрямках, перпендикулярних до напрямку поля вільний. У (5.199) використано позначення E_3 для власних значень оператора $\tilde{H}_3$, які є неперервними. Також наголосимо, що вираз (5.199) отриманий точно, ми не використовували наближення, пов'язані з малістю параметра некомутативності [68].

Знайдемо також власні функції гамільтоніана (5.176). Оскільки для координат та імпульсів x_i, p_i справджуються звичні комутаційні співвідношення, можемо записати:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \tilde{\psi}_1(x_1)\tilde{\psi}_2(x_2)\tilde{\psi}_3(x_3)\tilde{\psi}(\mathbf{a}). \tag{5.200}$$

Тут $\tilde{\psi}_i(x_i)$ власні функції $\tilde{H}_i$ визначають як (5.181)–(5.183). Звернемо увагу, що $\psi^{(3)}(x_3)$ – власні функції частинки у однорідному полі у звичному просторі. Ця функції добре відомі (див., для прикладу, [69])

$$\psi^{(3)}(x_3) = \left(\frac{4m^2}{\pi^3\alpha\hbar^4}\right)^{\frac{1}{6}} \Phi\left(\left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(-x_3 - \frac{E_3}{\alpha}\right)\right), \quad (5.201)$$

де Φ – функція Ейрі, яка означена як

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right) dt. \quad (5.202)$$

Функції $\tilde{\psi}(\mathbf{a})$ у (5.200) власні функції оператора

$$H'_{osc} = \frac{1}{2m_{osc}}\left(p_1^a - \frac{\alpha c_\theta \hbar k_2}{2\omega_{osc}l_P^2}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2m_{osc}}\left(p_2^a + \frac{\alpha c_\theta \hbar k_1}{2\omega_{osc}l_P^2}\right)^2 +$$
$$+\frac{(p_3^a)^2}{2m_{osc}} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a_1^2}{2} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a_2^2}{2} + \frac{m_{osc}\omega_{osc}^2 a_3^2}{2}. \quad (5.203)$$

Гамільтоніан (5.203) отримано заміною у (5.178) операторів p_1 та p_2 на їхні власні значення $\hbar k_1$, $\hbar k_2$. Власну функцію оператора (5.203), яка відповідає основному стану, шукатимемо у вигляді

$$\tilde{\psi}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} l_P^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{a^2}{2l_P^2} + i\beta_1 a_1 + i\beta_2 a_2)\right), \quad (5.204)$$

де β_1, β_2 – константи. Підставивши (5.204), (5.198) у рівняння Шредінгера

$$H'_{osc}\tilde{\psi}(\mathbf{a}) = \tilde{E}_{0,0,0}\tilde{\psi}(\mathbf{a}), \quad (5.205)$$

знайдемо:

$$\beta_1 = \frac{\alpha c_\theta k_2}{2\omega_{osc}l_P^2}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha c_\theta k_1}{2\omega_{osc}l_P^2}. \quad (5.206)$$

Отже, власну функцію оператора (5.203) можемо записати у такому вигляді

$$\tilde{\psi}(\mathbf{a}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}} l_P^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{a^2}{2l_P^2} - i\frac{\alpha c_\theta}{2\omega_{osc} l_P^2}(k_1 a_2 - k_2 a_1)\right). \quad (5.207)$$

На основі отриманих результатів можемо записати хвильові функції частинки у однорідному полі з гамільтоніаном (5.176)

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = C e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \Phi\left(\left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-x_3 - \frac{E_3}{\alpha}\right)\right) \times$$
$$\times e^{-\frac{a^2}{2l_P^2} - i\beta(k_1 a_2 - k_2 a_1)}, \quad (5.208)$$

тут C – константа нормування, константу β визначають як

$$\beta = \frac{\alpha c_\theta}{2\omega_{osc} l_P^2}. \quad (5.209)$$

Звернемо увагу, що некомутативність координат впливає на рух частинки тільки в напрямках, перпендикулярних до напрямку поля. Перші два доданки у (5.199) містять ефективну масу. Отже, квантованість простору вливає на масу частинки у однорідному полі у сферично-симетричному, інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі [68].

5.6 Задачі

1. Дослідити співвідношення алгебри Снайдера

$$[X_i, X_j] = i\hbar\beta^2(P_j X_i - P_i X_j),$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \beta^2 P_i P_j),$$
$$[P_i, P_j] = 0$$

при перетвореннях інверсії часу.

2. Перевірити виконання тотожності Якобі для всіх трійок операторів X_i, P_i, p_i^a, p_i^b, a_i, b_i, які задовольняють співвідношення некомутативної алгебри (5.144)–(5.146), (5.136)–(5.141).

3. Знайти період руху по колу у інваріантному відносно інверсії часу некомутативному просторі

$$[X_i, X_j] = ic_\theta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k^a,$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0,$$

   та дослідити його залежність від напрямку руху.

4. Знайти енергетичні рівні частинки в однорідному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі.

$$[X_i, X_j] = ic_a \sum_k \varepsilon_{ijk} a_k,$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0,$$

   де c_a – константи, a_k – додаткові координати, які відповідають гармонічному осцилятору.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] *Polchinski J.* M theory: Uncertainty and unification // *Fundamental Physics – Heisenberg and Beyond.* 2003. P. 157–166.

[2] *Jackiw R.* Observations on noncommuting coordinates and on fields depending on them // *Ann. Henri Poincarre.* 2003. Vol. 4, no. 2. P. 913–919.

[3] *Snyder H. S.* Quantized space-time // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 71, no. 1. P. 38–41.

[4] *Gross D. J., Mende P. F.* String theory beyond the planck scale // *Nucl. Phys. B.* 1988. Vol. 303, no. 3. P. 407–454.

[5] *Maggiore M.* A generalized uncertainty principle in quantum gravity // *Phys. Lett. B.* 1993. Vol. 304, no. 1-2. P. 65–69.

[6] *Witten E.* Reflections on the fate of spacetime // *Physics Today.* 1996. Vol. 49, no. 4. P. 24–30.

[7] *Seiberg N., Witten E.* String theory and noncommutative geometry // *J. High Energy Phys.* 1999. Vol. 1999, no. 09. Art. 032. 92 p.

[8] *Doplicher S., Fredenhagen K., Roberts J. E.* Spacetime quantization induced by classical gravity // *Phys. Lett. B.* 1994. Vol.331. no. 1-2. P. 39–44.

[9] *Kempf A., Mangano G., Mann R. B.* Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation // *Phys. Rev. D.* 1995. Vol. 52, no. 2. P. 1108–1118.

[10] *Kempf A.* Noncommutative geometric regularization // *Phys. Rev. D.* 1996. Vol. 54, no. 8. P. 5174–5178.

[11] *Kempf A.* Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. Vol. 35, no. 9. P. 4483–4496.

[12] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2004. Vol. 37, no. 14. P. 4267–4281.

[13] *Kempf A.* Non-pointlike particles in harmonic oscillators // *J.Phys. A: Math. Gen.* 1997. Vol. 30, no. 6. P. 2093–2101.

[14] *Brau F.* Minimal length uncertainty relation and the hydrogen atom // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. Vol. 32, no. 44. P. 7691–7696.

[15] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Composite system in deformed space with minimal length // *Phys. Rev. A.* 2010. Vol. 81, no. 1. Art.012106 8 p.

[16] *Frydryszak A. M., Tkachuk V. M.* Aspects of pre-quantum description of deformed theories // *Czech. J. Phys.* 2003. Vol. 53, no. 11. P. 1035–1040.

[17] *Mignemi S.* Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model // *Phys. Rev. D.* 2011. Vol. 84, no. 2. Art.025021. 11 p.

[18] *Mignemi S.* Classical and quantum mechanics of the nonrelativistic Snyder model in curved space // *Class. Quant. Grav.* 2012. Vol. 29, no. 21. Art. 215019. 19 p.

[19] *Mignemi S.* Classical dynamics on Snyder spacetime // *Int. J. Mod. Phys. D.* 2015. Vol. 24, no. 06. Art. 1550043. 12 p.

[20] *Romero J. M., Zamora A.* The area quantum and Snyder space // *Phys. Lett. B.* 2008. Vol. 661, no. 1. P. 11–13.

[21] *Lu L., Stern A.* Particle dynamics on Snyder space // *Nucl. Phys. B.* 2012. Vol. 860, no. 1. P. 186–205.

[22] *Tkachuk V. M.* Galilean and Lorentz transformations in a space with generalized uncertainty principle // *Found. Phys.* 2016. Vol. 46, no. 12. P. 1666–1679.

[23] *Gamboa J., Loewe M., Rojas J. C.* Noncommutative quantum mechanics // *Phys. Rev. D.* 2001. Vol. 64, no. 6. Art. 067901. 3p.

[24] *Bolonek K., Kosiński P.* On uncertainty relations in noncommutative quantum mechanics // *Phys. Lett. B.* 2002. Vol. 547, no. 1-2. P. 51–54.

[25] *Duval C., Horvathy P. A.* Exotic Galilean symmetry in the noncommutative plane and the Hall effect // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2001. Vol. 34, no. 47. P. 10097–10107.

[26] *Гнатенко Х. П.* Фізичні проблеми у некомутативному просторі. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2017. 128 С.

[27] *Christiansen H. R., Schaposnik F. A.* Noncommutative quantum mechanics and rotating frames // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 8. Art. 086005. 7 p.

[28] *Muthukumar B., Mitra P.* Noncommutative oscillators and the commutative limit // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66, no. 2. Art.027701. 3 p.

[29] *Jackiw R.* Noncommuting fields and non-Abelian fluids // *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.).* 2004. Vol. 127. P. 53–62.

[30] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Minimal length, area, and volume in a space with noncommutativity of coordinates // *J.Phys. Stud.* 2016. Vol. 20, no. 1/2. Art. 101. 5 p.

[31] *Daszkiewicz M., Walczyk C. J.* Newton equation for canonical, Lie-algebraic, and quadratic deformation of classical space // *Phys. Rev. D.* 2008. Vol. 77, no. 10. Art. 105008. 7 p.

[32] Lie-deformed quantum Minkowski spaces from twists: Hopf-algebraic versus Hopf-algebroid approach / J. Lukierski, D. Meljanac, S. Meljanac et al. // *Phys. Lett. B.* 2018. Vol.777. P. 1–7.

[33] Twisted statistics and the structure of Lie-deformed Minkowski spaces / D. Meljanac, S. Meljanac, D. Pikutić, Kumar S. Gupta // *Phys. Rev. D.* 2017. Vol. 96, no. 10. Art.105008. 6 p.

[34] *Amelino-Camelia G., Arzano M.* Coproduct and star product in field theories on Lie-algebra noncommutative space-times // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 8. Art. 084044. 8 p.

[35] *Daszkiewicz M.* Canonical and Lie-algebraic twist deformations of Galilei algebra // *Mod. Phys. Lett. A.* 2008. Vol. 23, no. 07. P. 505–517.

[36] *Miao Y.-G., Wang X.-D., Yu S.-J.* Classical mechanics on noncommutative space with Lie-algebraic structure // *Ann. Phys.* 2011. Vol. 326, no. 8. P. 2091–2107.

[37] *Romero J. M., Santiago J. A., Vergara J. D.* Note about the quantum of area in a noncommutative space // *Phys. Rev. D.* 2003. Vol. 68, no. 6. Art. 067503. 2 p.

[38] *Smailagic A., Spallucci E.* Isotropic representation of the noncommutative 2d harmonic oscillator // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 65, no. 10. Art. 107701. 4 p.

[39] *Smailagic A., Spallucci E.* Noncommutative 3d harmonic oscillator // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. Vol. 35, no. 26. P. L363–L368.

[40] *Djemai A. E. F., Smail H.* On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space // *Commun. Theor. Phys.* 2004. Vol. 41, no. 6. P. 837–844.

[41] *Harko T., Liang S.-D.* Energy-dependent noncommutative quantum mechanics // *Eur. Phys. J. C.* 2019. Vol. 79:300. 22 p.

[42] *Quesne C., Tkachuk V. M.* Harmonic oscillator with nonzero minimal uncertainties in both position and momentum in a SUSYQM framework // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003. Vol. 36, no. 41. P. 10373–10389.

[43] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Weak equivalence principle in noncommutative phase space and the parameters of noncommutativity // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, no. 31. P. 2463–2469.

[44] *Gnatenko Kh. P., Laba H. P., Tkachuk V. M.* Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum // *Mod. Phys. Lett. A.* 2018. Vol. 33, no. 23. Art. 1850131. 12 p.

[45] *Gnatenko K. P., Tkachuk V. M.* Kinetic energy properties and weak equivalence principle in a space with GUP // *Mod. Phys. Lett. A.* 2020. Vol. 33, no. 4. Art. 2050096. 12 p.

[46] *Williams J. G., Turyshev S. G., Boggs D. H.* Lunar laser ranging tests of the equivalence principle // *Class. Quantum Grav.* 2012. Vol. 29, no. 18. Art. 184004. 11 p.

[47] *Silagadze Z.* Quantum gravity, minimum length and Keplerian orbits // *Phys. Lett. A.* 2009. Vol. 373, no. 31. P. 2643–2645.

[48] Precession of Mercury's perihelion from ranging to the MESSENGER spacecraft / Ryan S. Park, William M. Folkner, Alexander S. Konopliv et al. // *The Astronomical Journal.* 2017. Vol. 153:121. 7 p.

[49] Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation / Sándor Benczik, Lay Nam Chang, Djordje Minic et al. // *Phys. Rev. D.* 2002. Vol. 66, no. 2. Art. 026003. 11 p.

[50] *Stetsko M. M., Tkachuk V. M.* Perturbation hydrogen-atom spectrum in deformed space with minimal length // *Phys. Rev.A*. 2006. Vol. 74, no. 1. Art. 012101. 5 p.

[51] *Stetsko M. M.* Corrections to the ns levels of the hydrogen atom in deformed space with minimal length // *Phys. Rev. A*. 2006. Vol. 74, no. 6. Art. 062105. 5 p.

[52] *Ivetić B., Meljanac S., Mignemi S.* Classical dynamics on curved Snyder space // *Class. Quant. Grav.* 2014. Vol. 31, no. 10. Art.105010. 13 p.

[53] *Mignemi S., Štrajn R.* Snyder dynamics in a Schwarzschild spacetime // *Phys. Rev. D*. 2014. Vol. 90, no. 4. Art. 044019. 5p.

[54] *Hossenfelder S.* Multiparticle states in deformed special relativity // *Phys. Rev. D*. 2007. Vol. 75, no. 10. Art. 105005. 8 p.

[55] *Amelino-Camelia G.* Doubly-special relativity: facts, myths and some key open issues // *Symmetry*. 2010. Vol. 2(1). P. 230–271.

[56] *Hinterleitner F.* Canonical doubly special relativity theory // *Phys. Rev. D*. 2005. Vol. 71, no. 2. Art. 025016. 6 p.

[57] *Hossenfelder S.* The soccer-ball problem // *SIGMA*. 2014. Vol.10. Art. 174. 8 p.

[58] *Magpantay J. A.* Dual doubly special relativity // *Phys. Rev. D*. 2011. Vol. 84, no. 2. Art. 024016. 10 p.

[59] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Upper bound on the momentum scale in noncommutative phase space of canonical type // *EPL*. 2019. Vol. 127, no. 2. Art. 20008. 7 p.

[60] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Minimal length estimation on the basis of studies of the Sun-Earth-Moon system in deformed space // *Int. J. Mod. Phys. D*. 2019. Vol. 28, no. 8. Art. 1950107. 13 p.

[61] *Domingos J. M.* Time reversal in classical and quantum mechanics // *Int. J Theor. Phys.* 1979. Vol. 18, no. 3. P. 212–230.

[62] *Gnatenko Kh. P., Samar M. I., Tkachuk V. M.* Time-reversal and rotational symmetries in noncommutative phase space // *Phys. Rev. A.* 2019. Vol. 99, no. 1. Art. 012114. 6 p.

[63] Scaling of variables and the relation between noncommutative parameters in noncommutative quantum mechanics / O Bertolami, J G Rosa, C M L de Aragao et al. // *Mod. Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 21, no. 10. P. 795–802.

[64] *Gnatenko Kh. P.* Kinematic variables in noncommutative phase space and parameters of noncommutativity // *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, no. 31. Art. 1750166. 12 p.

[65] *Gnatenko Kh. P., Tkachuk V. M.* Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2017. Vol. 32, no. 26. Art. 1750161. 15 p.

[66] *Гнатенко Х. П., Ткачук В. М.* Багаточастинкова система у сферично-симетричному просторі з канонічною некомутатвністю координат // *Ж-л фіз. дослідж.* 2017. Т. 21. № 4. Ст.4002. 7 с.

[67] *Гнатенко Х. П., Морозко О. О., Криницький Ю. С.* Рух частинки у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу та слабкий принцип еквівалентності // *Ж-л фіз. дослідж.* 2018. Т. 22. № 1. Ст.1001. 6 с.

[68] *Gnatenko Kh. P., Stakhur Kh. I., Kryzhova A. V.* Particle in uniform field in noncommutative space with preserved time reversal and rotational symmetries // *J. Phys. Stud.* 2016. Vol. 25, no. 2 Art. 2002. 6 p.

[69] *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Non-Relativistic Theory, Course of Theoretical Physics. (Pergamon Press, Oxford, 1977), 3rd ed., Vol. 3.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

ГНАТЕНКО Христина Павлівна,
ТКАЧУК Володимир Михайлович

Фізичні системи у квантованому просторі

Навчальний посібник

Редактор	**Л. Макітринська**
Комп'ютерна верстка	**Х. Гнатенко**
Обкладинка	**Х. Гнатенко**

Формат 60×90 $^1/_{16}$
Умовн. друк. арк. 8.13
Наклад 100 прим. Зам.

Львівський національний університет імені Івана Франка;
вул. Університетська, 1, м. Львів, 75000.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавництв, виготовників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.

Друк та палітурні роботи ТОВ «БУК-ДРУК»
вул. Бердичівська, 17А, м. Житомир,
тел.: 063 101 22 33, e-mail: printinzt@gmail.com
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавництв, виготовників
і розповсюджувачів видавничої продукції України.
Серія ДК №5610 від 21.09.2017 р.

Гнатенко Х. П.

Г 56 Фізичні системи у квантованому просторі : навч. посібник / Х. П. Гнатенко, В. М. Ткачук. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2021. — 130 с.

У навчальному посібнику розглянуто квантований простір, побудований на основі ідеї про деформацію звичних комутаційних співвідношень для операторів координат та імпульсів; проаналізовані основні типи деформованих алгебр, за допомогою яких описують особливості структури простору на планківських масштабах; висвітлені фундаментальні проблеми у квантованому просторі та подані шляхи їхнього розв'язання. У посібнику репрезентовані результати оригінальних досліджень його авторів, що буде корисним для всіх, хто цікавиться особливостями структури простору на планківських масштабах, побудовою самоузгодженої теорії квантованого простору зі збереженими фундаментальними законами та принципами, знаходженням верхньої межі для мінімальної довжини.

Для студентів, аспірантів фізико-математичних спеціальностей, викладачів та науковців.

ISBN 978-617-10-0642-3